3　行列と連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

を満たす x, y を求める．左辺を計算すると，

$$\begin{pmatrix} 2x+y \\ x-4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

となるので，これは連立方程式

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x+y & = & 7 \\ x-4y & = & 9 \end{array} \right.$$

と同値.

連立 1 次方程式は行列を使って表現できる.

3.1　係数行列と拡大係数行列

次の連立 1 次方程式を考える.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

これを行列を使って書くと，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{1}$$

左辺の行列 $A = (a_{ij})$ は**係数行列** と呼ばれる.

この係数行列 A に列ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ を付け加えた行列

$$[A : \boldsymbol{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

は **拡大係数行列**と呼ばれる.

3.2　数ベクトルの 1 次結合

m 個の同じ型の数ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots \boldsymbol{a}_m$ が与えられたとき，ベクトル

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a_n}$$

を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots \boldsymbol{a}_m$ の**一次結合**という. (1) 式は A をその列ベクトル $\boldsymbol{a}_j$, $(1 \leq j \leq n)$ を使うと

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

と書け，求める方程式を解くことと

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \dots x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

を満たす $x_1, x_2, \dots, x_n$ を求めることと同値.

例 3.1 教科書 p.18 問題 1.4 の 3 番

次の列ベクトル $\boldsymbol{a}$ が列ベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ の一次結合でかけるか調べ，かけるときは実際に一次結合で表せ.

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

解　(1) $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{b}_1 + y\boldsymbol{b}_2$ を満たす x, y を求めてみる.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ -x + y \end{pmatrix}$$

だから， x, y は連立方程式

$$\begin{cases} 3x + y &= -2 \\ -x + y &= 1 \end{cases}$$

を満たす．これを解いて $x = -3/4, y = 1/4$ を得る．したがって $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ の一次結合で書け,

$$\boldsymbol{a} = \frac{-3}{4}\boldsymbol{b}_1 + \frac{1}{4}\boldsymbol{b}_2$$

となる.

(2) 同様にして，$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{b}_1 + y\boldsymbol{b}_2$ と書けるとすると，連立方程式

$$\begin{cases} x + 2y &= 1 \\ 3x + 3y &= 2 \\ y &= 1 \end{cases}$$

が成り立つ．最後の式から $y = 1$ となるが，これは最初の二つの式に代入すると．$x = -1, 3x = -1$ となり両立しない．したがって $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ の一次結合にはなっていない.

練習 3.1 次の方程式を解け

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ p & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$