4　連立 1 次方程式

行列を使って連立 1 次方程式を解くことができる．このことを次節までで勉強する．

4.1　基本変形

連立 1 次方程式:

$$\begin{cases} 2x+3y &= -1 & ① \\ x-y &= 2 & ② \end{cases}$$

を考える．これを解こう．
step 1　①+ ②×3 として

$$\begin{cases} 5x &= 5 & ③ \\ x-y &= 2 & ② \end{cases}$$

step 2 ③/5 として

$$\begin{cases} x &= 1 & ④ \\ x-y &= 2 & ② \end{cases}$$

step 3 ②−④ として

$$\begin{cases} x &= 1 & ④ \\ -y &= 1 & ⑤ \end{cases}$$

step 4 ⑤×(−1) として

$$\begin{cases} x &= 1 & ④ \\ y &= -1 & ⑥ \end{cases}$$

として解 $x=1, y=-1$ を得る． step 1 ∼ step 4 の変形は逆戻りできる (これらの式は同値である）ことに注意する．

これらの計算には**基本変形**という操作が使われている．連立 1 次方程式は基本変形をしても同値である．基本変形を繰り替えして連立 1 次方程式を解くことを**掃き出し法**という．

(1) 一つの式を何倍か ($\neq 0$) する．(step 2, step 4)

(2) 二つの式を入れ替える．

(3) 一つの式に他の式 (の何倍か) を加える (step 3)

これらの計算で対応する拡大係数行列の変化をおってみると，
最初，$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ ではじまった拡大係数行列は，**step 1** ののち

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

となり，**step2** の操作で

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

と変化して **step 3** の操作で

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

となり，最後に **step 4** の操作で

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

となる．拡大係数行列は基本変形に対応して次の変化を受けるこれを**行列の基本変形**という．

(1) 一つの行を何倍か ($\neq 0$) する．

(2) 二つの行を入れ替える．

(3) 一つの行に他の行 (の何倍か) を加える．

4.2 簡約な行列

連立 1 次方程式が解けたときに出てくる拡大係数行列の形の特徴を表すのが**簡約な行列**である．

定義 4.1 行列の零ベクトルでない行ベクトルの 0 でない最初（一番左）の成分をその行の **主成分** という．

定義 4.2 次の条件 (I) $\sim$ (IV) を満たすような行列を，**簡約な行列**と言う．

(I) 行ベクトルのうちに零ベクトルがあれば，それは零ベクトルでないものより下にある．

(II) 零ベクトルでない行ベクトルの主成分は 1 である．

(III) 第 i 行の主成分を a_{ij_i} とすると，$j_1 < j_2 < \ldots$ となる．つまり各行の主成分は下の行にあるものほど右にある．

(IV) 各行の主成分を含む列の他の成分はすべて 0.

与えられた行列は基本変形を繰り返すことにより簡約な行列にすることができる．これを**簡約化**と言う．(実はこの時得られる簡約な行列はただ一つになる事も知られている．後で示すことになる）例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ① & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & ① & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ① \end{pmatrix}$$

① は主成分を表す.

行列 A の **階数** $\mathrm{rank}(A)$

行列 A の簡約化を B とするとき，B の零ベクトルでない行ベクトルの個数を A の **階数 (ランク)** と呼び，$\mathrm{rank}(A)$ と書く．これは B の行の主成分を含む列の個数とも一致するので，次が成り立つ

定理 4.1 A を $m \times n$ 行列とするとき,

$$\mathrm{rank}(A) \leq m, \quad \mathrm{rank}(A) \leq n$$

である．

例 4.1 次の行列を簡約化しよう．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{第 } 1 \text{ 行}) - 2 \times (\text{第 } 2 \text{ 行})$$

したがってこの行列の階数は 2 であることもわかる．

例 4.2

$$\begin{pmatrix}4&3&2&1\\3&3&2&1\\2&2&2&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&3&2&1\\2&2&2&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} \quad (1\text{行}-2\text{行})$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&2&1\\0&2&2&1\\0&1&1&1\end{pmatrix} \quad (2,3,4\text{ 行から }1\text{ 行をそれぞれ }3,2,1\text{ 倍して引く})$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&2&1\\0&1&1&1\end{pmatrix} \quad (2\text{行}-3\text{行}) \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3\text{行}-2\times 2\text{行}\\ 4\text{行}-2\text{行}\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

最後の二つの基本変形は何をやったか?

練習 4.1 (教科書 p.27 問題 2.2, 4 の一部) 次の行列を簡約化せよ．また
それぞれの行列の階数（ランク）を求めよ

$$(1)\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&1&1\end{pmatrix} \qquad (2)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&2&-1\end{pmatrix} \qquad (3)\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$