7　ベクトル空間

これから紹介するベクトル空間の例はたくさんあり，それらをまとめてベクトル空間として扱うことは時として非常に便利になる．やや抽象的な定義からはじめることになるが，あとで例をあげることによりこれまで考えたこともないような二つのものをベクトル空間として同じように扱うことができることも学習する．

7.1　定義と例

まず，定義からはじめよう．

定義 7.1 集合 V に次の二つの演算が定義されて，以下の (1) ∼ (8) の性質が成り立つとき，V を (実) **ベクトル空間** という.（スカラーとしてここでは実数をとっているので，実ベクトル空間と言う．スカラーとしては複素数やもっと違うものをとることもできるが、ここでは実数に限って話をする）
和： $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in V$ がただ一つ定まる．
スカラー倍： 実数 $a \in \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{u} \in V$ に対して $a\boldsymbol{u} \in V$ がただ一つ定まる．
性質：

(1) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \qquad \text{(和の可換性)}$$

(2) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対して

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \qquad \text{(和の結合律)}$$

(3) ある $\mathbf{0} \in V$ があり，$\boldsymbol{u} \in V$ ならば

$$\mathbf{0}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\boldsymbol{u} \qquad \text{(零ベクトルの存在)}$$

(4) $a, b \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in V$ のとき

$$a(b\boldsymbol{u})=(ab)\boldsymbol{u} \qquad \text{(スカラー倍の結合律)}$$

(5) $a, b \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in V$ のとき

$$(a+b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u} \qquad \text{(分配法則（１）)}$$

(6) $a \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して

$$a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v} \qquad \text{(分配法則（２）)}$$

(7) 任意の $\boldsymbol{u} \in V$ に対して

$$1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \qquad \text{(恒等変換 1)}$$

(8) 任意の $\boldsymbol{u} \in V$ に対して

$$0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \qquad \text{(0 倍は } \boldsymbol{0} \text{ になる)}$$

例 7.1 以下はすべてベクトル空間の例.
[例 1] n 次元列ベクトルの全体 $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ ; \ x_1, \dots x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

[例 2] n 次元行ベクトルの全体 $\mathbb{R}_n$

$$\mathbb{R}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \ ; \ \ x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}\}$$

[例 3] 実数係数のたかだか n 次の多項式の全体 $\mathbb{R}[x]_n$

$$\mathbb{R}[x]_n = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k ; a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq k \leq n\}$$

[例 4] 区間 (a, b) で連続な実数値関数の全体 $C(a, b)$

$$C(a, b) = \{f : (a, b) \to \mathbb{R}, \ f \text{ は連続 }\}$$

7.2 部分空間

定義 7.2 ベクトル空間 V の部分集合 W がベクトル空間になるとき，W はベクトル空間 V の**部分空間**であるという.

定理 7.1　(教科書 p.64，定理 4.1.1)
　ベクトル空間 V の部分集合 W がベクトル空間になるための必要十分条件は次の (i) $\sim$ (iii) が成り立つことである．
(i) $\mathbf{0} \in W$,
(ii) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ ならば $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$,
(iii) $a \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v} \in W$ ならば $a\boldsymbol{v} \in W$.

証明 (i) $\sim$ (iii) が成り立つと W にはスカラー倍と和が定義でき，W はベクトル空間 V の部分集合なので，この和とスカラー倍は (1) $\sim$ (8) を満たしている．したがって W もベクトル空間.
　逆を示そう．W が V の部分空間としよう．$\boldsymbol{w} \in W$ として，[(8)] より $0\boldsymbol{w} = \mathbf{0} \in W$ よって (i) が成り立つ．(ii), (iii) は W が部分空間であることから定義から成り立つ. □

例 7.2 (教科書 p.66, 例題 4.1.3)
　次の W は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間になるか？

(1) $W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \ ; \ f(1) = 0, \ f(-1) = 0\}$

(2) $W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \ ; \ f(1) = 1\}$

(3) $W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \ ; \ xf'(x) = 2f(x)\}$

解　定理 7.1 の 3 つの条件を確かめれば良い．つまり，
(i) $\mathbf{0} \in W$,
(ii) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ ならば $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$,
(iii) $a \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v} \in W$ ならば $a\boldsymbol{v} \in W$.
　の 3 条件である．$\mathbb{R}[x]_3$ では $\mathbf{0}$ は恒等的に 0 をとる関数となる．

　(1) では，まず $\mathbf{0} \in W$ がわかり，$f, g \in W$ のとき $h = f + g$ とかくと，

$$h(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0, \quad h(-1) = f(-1) + g(-1) = 0 + 0$$

となり，$h = f + g \in W$ もわかる．最後に，$a \in \mathbb{R}$ とする．$f \in W$ とすると，

$$af(1) = a \cdot 0 = 0, \ af(-1) = a \cdot 0 = 0$$

となり，$af \in W$ がわかる．以上より， W は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間.

(2) では $\mathbf{0}(1)=0$ だから $\mathbf{0}\notin W$ である．よって，W は部分空間ではない.

(3) では $\mathbf{0}(x)=0$ なので，$\mathbf{0}'(x)=0$ となり

$$x\mathbf{0}'(x)=0=2\mathbf{0}(x) \quad \therefore \mathbf{0}\in W.$$

また $f,g\in W$ のとき $h=f+g$ とかくと

$$xh'(x)=x(f'(x)+g'(x))=xf'(x)+xg'(x)=2(f(x)+g(x))=2h(x)$$

となり，$h=f+g\in W$. つぎに $a\in\mathbb{R}, f\in W$ のとき $g=af$ とかくと

$$xg'(x)=axf'(x)=2af(x)=2g(x)$$

なので，$g\in W$. したがって W は部分空間.

練習 7.1 (1) 次の W_1,W_2 はベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間か？

$$\begin{aligned} W_1&=\{x\in\mathbb{R}^3\ ;\ x_1+x_2-x_3=0,\ 3x_1+x_2+2x_3=0\}\\ W_2&=\{x\in\mathbb{R}^3\ ;\ x_1^2+x_2^2-x_3^2=0, x_1-x_2+2x_3=0\}\end{aligned}$$

(2) 次の W_3,W_4 はベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間か？

$$\begin{aligned} W_3&=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3\ ;\ f(0)=0, f(1)=0\}\\ W_4&=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3\ ; f''(x)-2xf'(x)=0\}\end{aligned}$$