# 8　一次独立と一次従属

$V$ をベクトル空間とする.

## 8.1　定義

**定義 8.1** $\boldsymbol{v} \in V$ が $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ の 1 **次結合**であるとは実数 $c_1, \ldots, c_n$ を選んで

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

と書けるときにいう.

**定義 8.2** $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が 1 **次独立**であるとは, $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

となるならば, $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ でなくてはいけないときに言う.

$$\boldsymbol{v}_j = \begin{pmatrix} v_{j1} \\ \vdots \\ v_{jm} \end{pmatrix}$$

と書くとき, $\{\boldsymbol{v}_j\}$ 達が一次独立であることは連立斉次方程式

$$\left\{ \begin{array}{llllll} v_{11}x_1 & + \ldots & +v_{n1}x_n & = & 0 \\ & : & : & : & \\ v_{m1}x_1 & + \ldots & +v_{nm}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

が, 自明な解 $x_1 = \ldots = x_n = 0$ しか持たないことに対応している.
一次独立でないとき 1 **次従属**という.

## 8.2　判定法

**定理 8.1** (教科書 p.70, 定理 4.2.1)
$V$ のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次従属である必要十分条件は, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ のうち少なくとも一つのベクトルが他の $n-1$ 個のベクトルの一次結合で書けることである.

**証明**　(必要性) $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次従属とする．このとき少なくとも 1 つは 0 でない $c_1, \ldots, c_n$ がとれて,

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = 0.$$

簡単のため $c_1 \neq 0$ とする．このとき上の式を $\boldsymbol{u}_1$ について解く事により, $\boldsymbol{u}_1$ は他の $n-1$ 個のベクトルの 1 次結合で書ける．

（十分性）$\boldsymbol{u}_1$ が他の一次結合でかけると,

$$\boldsymbol{u}_1 = c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$$

これは (3) で $c_1 = -1$ となっている式なので, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次従属. □

**定理 8.2** (教科書 p.70, 定理 4.2.2)

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次独立で, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次従属ならば $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次結合で書ける．

**証明**　仮定より, $c, c_1, \ldots, c_n$ をどれかは 0 で無いように選んで

$$c\boldsymbol{u} + c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．もし $c = 0$ ならばこの式は

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$$

と同値で, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次独立なので, このとき $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ でなくてはいけない．したがって $c \neq 0$ である．移項して $-c$ で割ることにより, $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次結合で書けている． □

記号として $\boldsymbol{u}_1, \ldots \boldsymbol{u}_m \in V$ と $m \times n$ 行列 $A$ に対して

$$(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m)A = (a_{11}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{u}_m, \ldots, a_{1n}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{u}_m)$$

と書く．

**定理 8.3** (教科書 p.71, 定理 4.2.3)

$V$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ に対し,

(1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の各ベクトルは $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書ける．

(2) $n > m$

ならば $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次従属である.

**証明**　条件 (1) より，ある $m \times n$ 行列 $A$ に対して

$$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m)A$$

となっている．いま $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ という同次方程式を考えると，$\mathrm{rank}(A) \leq m < n$ だから，自明でない解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ がある．($\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$ ) よって,

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m)A\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$$

となり，$\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_n$ は 1 次従属になる． □

## 8.3　例

**例 8.1** (教科書 p.73, 例題 4.2.2)

(1) 次のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ を行列を用いて $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ の 1 次結合で表せ.

(2) また，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ が 1 次独立のとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が 1 次独立か 1 次従属か調べよ.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3, & \boldsymbol{v}_2 &= 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 6\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_4, & \boldsymbol{v}_4 &= \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3 + 3\boldsymbol{u}_4 \end{aligned}$$

**解**　(1) 先ほど学んだ行列を使って表そう.

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) \\ &= (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3, 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 6\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4, 2\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3 + 3\boldsymbol{u}_4) \\ &(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) 右辺の行列を $A$ と書こう.

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}$$

とする．これは列ベクトル $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$ を使うと

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

と書け，左辺は $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4)A\boldsymbol{c}$ となる．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ は 1 次独立と仮定してあるので，上式が成り立つのは $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ の時のみ．$A$ を簡約化しよう．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{①+②, ③+②\times 3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-②\leftrightarrow①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{①-②, ④-②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①+④\times 2, ③+④\times 5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{③/6, ④\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①-③\times 3, ②-③, ④+③\times 2, ③\leftrightarrow④} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，$\mathrm{rank}(A) = 4$ なので，$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{0}$ のみ．つまり $c_i = 0$ となり $\boldsymbol{v}_i$ 達は一次独立.

**練習 8.1** 次のベクトルは 1 次独立か 1 次従属か調べよ．(教科書 p.74, 問題 4.2,(1),(3))

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$