9　ベクトルの一次独立な最大個数

V をベクトル空間，X をその部分集合とするとき，X の中に r 個の 1 次独立なベクトルはあるが，X の中のどの $r+1$ 個のベクトルも 1 次従属になるとき，r を X のベクトルの 1 **次独立な最大個数**という．

定理 9.1 (教科書 p.75, 定理 4.3.1)

V のベクトルの二つの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ と $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ に対し，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の各ベクトルが $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合でかけるならば，

$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ の 1 次独立な最大個数 $\leq (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m)$ の 1 次独立な最大個数

証明　$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ のベクトルの 1 次独立な最大個数を r とすると，r 個の 1 次独立なベクトルがある．簡単のため $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ が 1 次独立とする．このとき，$j \geq r+1$ に対して $\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ は 1 次従属なので，定理 8.2（教科書定理 4.2.2）により $\boldsymbol{u}_j$ は $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書ける．したがって仮定から $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ の（したがって上の事から $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ の） 1 次結合で書ける．ところが，定理 8.3（教科書定理 4.2.3）により，このとき $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ の 1 次独立な最大個数は r 以下．
□

定理 9.2 (教科書 p.71, 定理 4.3.2)

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ のベクトルの 1 次独立な最大個数が r であるための必要かつ十分な条件は：

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ の中に r 個の 1 次独立なベクトルがあり，他の $m-r$ 個のベクトルはこの r 個の 1 次結合で書ける．

証明　定理 8.2（教科書定理 4.2.2）により必要性は先ほど証明した．また，十分性は明らかにこの条件のもとでは定理 9.1（教科書定理 4.3.1）により，

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ のベクトルの 1 次独立な最大個数は r 以下．　□

行列 A の簡約化を B と書くとき，それぞれの列ベクトルへの分解を

$$A = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n], \quad B = [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n]$$

と書くと，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である．$\mathrm{rank}(A)$ の定義から，これは B の行の主成分を含む列ベクトルの個数と同じであり，これらは 1 次独立．これらの列ベクトルを $\boldsymbol{b}'_1, \ldots \boldsymbol{b}'_r$ とかくと，他の B の

列ベクトルは $\boldsymbol{b}'_1, \dots \boldsymbol{b}'_r$ の一次結合でかけるので，r は B の列ベクトルの 1 次独立な最大個数となる．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に注意すると，r は A の列ベクトルの最大個数にも等しい．

定理 9.3 (教科書 p.77 定理 4.3.3)

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(A) &= A \text{ の列ベクトルの 1 次独立な最大個数} \\ &= A \text{ の行ベクトルの 1 次独立な最大個数}\end{aligned}$$

証明　上で言った事により，前半の等式が成り立っている．後半を示そう．

ふたたび A の簡約化を B とすると，B の零ベクトルでない行ベクトルは 1 次独立である．その個数は主成分を含む列ベクトルの個数 rankA と等しい．(この個数が B の一次独立な行ベクトルの最大個数を与える)

一方，A と B は互いに基本変形を行に施してうつりあうので，B の行ベクトルは A の行ベクトルの一次結合で書け，定理 9.1 (教科書定理 4.3.1) により，

$$\begin{aligned}&A \text{ の行ベクトルの 1 次独立な最大個数} \\ \geq &B \text{ の行ベクトルの 1 次独立な最大個数} = \mathrm{rank}(A)\end{aligned}$$

逆に A の行ベクトルは B の行ベクトルの基本変形で得られるので，逆向きの不等式も得られる．□

定理 9.4 (教科書 p.78, 定理 4.3.5)

行列の簡約化は唯一通りに決まる．

証明　A の簡約化を B と書いて，B が一意的に決まることを示す．まず，$\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$ のときは $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1$ となる．(第一成分が 1，それ以外の成分は 0) $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$ なら $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{0}$ どちらにしても一意的に　$\boldsymbol{b}_1$ は決まる．$\boldsymbol{a}_k$ が $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{k-1}$ の 1 次結合で書けなければ，$\boldsymbol{b}_k$ は主成分を含む基本ベクトルで，$\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_{k-1}$ と一次独立になる．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ だったので，$\boldsymbol{a}_k = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1}$ から $\boldsymbol{b}_k = c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_{k-1}\boldsymbol{b}_{k-1}$ を得る．このうち 1 次独立なものたちだけで $\boldsymbol{a}_k$ を表したとき

$$\boldsymbol{a}_k = d_1\boldsymbol{a}'_1 + \cdots + d_r\boldsymbol{a}'_r$$

となったとすると，上の事から対応する $\boldsymbol{b}'_j$ は一次独立な基本ベクトルで，$\boldsymbol{b}_k = d_1\boldsymbol{b}'_1 + \cdots + d_r\boldsymbol{b}'_r$ となり，$\boldsymbol{b}_k$ も一意に決まる．□

定理 9.5 (教科書 p.78, 定理 4.3.6)

V のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ は 1 次独立とする．ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $m \times n$ 行列 A を用いて

$$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m)A$$

と表せるとき，

(1) $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ と A の列ベクトル $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ には同じ 1 次関係式が成り立つ．

(2) $m = n$ のとき，

$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow$ A が正則行列 (i.e. $\mathrm{rank}(A) = n$)

証明 (1)

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

とする．このとき左辺は $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{c}$ と書ける．ただし，

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

仮定によりこれは

$$(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m)A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

となるが，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ が 1 次独立なので，$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ でなくてはならない．つまり

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

となる．

(2) $m = n$ とする．

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

とすると，(1) によりこれは

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

と同値である．したがって $\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立ならば $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ となり，これは $\mathrm{rank}(A) = n$ を意味している．逆も，$\mathrm{rank}(A) = n$ のとき

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

の解は $c_1 = \ldots = c_n = 0$ しかなく，これは $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であることを言っている． □

例 9.1 (教科書 p.79, 例題 4.3.2)

次の $\mathbb{R}[x]_3$ のベクトルの 1 次独立な最大個数 r と r 個の 1 次独立なベクトルを一組求め，他のベクトルをこれらの 1 次結合で表せ.

$$\begin{aligned} &f_1(x) = 1 + x + 3x^2, && f_2(x) = 1 + 2x - x^3, \\ &f_3(x) = 1 + 3x - 3x^2 - 2x^3, && f_4(x) = -2 - 4x + x^2 - x^3, \\ &f_5(x) = -1 - 4x + 7x^2 \end{aligned}$$

解　$f_1, \dots f_5$ を 1 次独立なベクトル $1, x, x^2, x^3$ の 1 次結合で書くと，

$$(f_1, \dots, f_5) = (1, x, x^2, x^3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける．右辺の行列を A とすると，定理 9.5(教科書 定理 4.3.6) により $f_1, \dots, f_5$ の 1 次関係式を求めるには A の列ベクトルの 1 次関係式を求めれば良い．これは，A の簡約形を求めれば良いことになる．計算して

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & \\ 0 & -3 & -6 & 7 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

最後の行列には主成分を含む列ベクトルは 3 個あるので，1 次独立なベクトルの最大個数は 3 個．簡約形 B の列ベクトルについて，

$$\boldsymbol{b}_3 = -\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2, \quad \boldsymbol{b}_5 = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_4$$

が成り立っている．A も同じ関係式を満たすので，f_1, f_2, f_4 が 1 次独立で，

$$f_3 = -f_1 + 2f_2, \quad f_5 = f_1 - f_2 + f_4$$

が成り立つ.

練習 9.1 教科書 p.80 問題 4.3 の 1. を解け