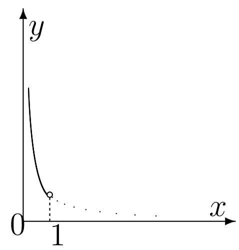
1　いろいろな関数

1.2　関数とグラフ

関数: x に対して**唯一つ** y が決まるとき，この対応を関数という.
$y = f(x)$ と書く事が多い.
定義域: 関数 $y = f(x)$ で，x の動く範囲.　　D などで表す.
値域: 関数 $y = f(x)$ で，定義域内の x に対応する y の動く範囲.
定義域 D に対して $f(D)$ と書く.

例 1.1 $y = 1/x$ を $0 < x < 1$ で考える時，この関数の定義域は $0 < x < 1$ で値域は $1 < y < \infty$ となる.



1.3　グラフの平行移動

定理 1.1 (教科書 p.6, 定理 1.1)
関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものは次式で与えられる.

$$y - q = f(x - p)$$

練習 1.1 (教科書 p.6 問 1.1) 次の関数を指定された方向に指定された量だけ平行移動せよ.

(1) $y = 3x + 2$　　$(-1, 2)$

(2) $y = -x^2 + x + 6$　　$(3, -2)$

1.4　合成関数と逆関数

$y = f(x), z = g(y)$ を考える． f の定義域 D, 値域 $f(D)$ と g の定義域 E について $f(D) \subset E$ ならば， $y = f(x)$ という点はさらに g によって $z = g(y)$ に写すことができる．このとき $x \in D$ は最初に f を使い，次に g を使って

$$z = g(f(x))$$

に写る．この x から $z = g(f(x))$ に写す関数を $g \circ f$ と書き，関数 f と g の**合成**と呼ぶ.

注意 1.1
- f の値域が g の定義域に入っていないときは $g \circ f$ は定義できない．(例えば，$f(x) = -x^2, D = \mathbb{R}, g(y) = \sqrt{y}, E = [0, \infty)$)
- $f \circ g$ と $g \circ f$ がどちらも定義できたとしても，この二つは一般に同じものにはならない．(例えば，$f(x) = \sin x, D = \mathbb{R}, g(y) = y^2 + 1, E = \mathbb{R}$)

練習 1.2 (教科書 p.8 問 1.3) 次の二つの関数 f, g に対して合成関数 $g \circ f$ は定義できるか．定義できる場合は $(g \circ f)(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = 3x - 1\ (0 \leq x \leq 1),\quad g(x) = -x + 2(-1 \leq x \leq 1)$

(2) $f(x) = 3x - 1\ (0 \leq x \leq 1),\quad g(x) = -x + 2(-2 \leq x \leq 2)$

(3) $f(x) = x^2(-1 \leq x \leq 1),\quad g(x) = x + 1(0 < x \leq 1)$

$y=f(x)$ という関数は，定義域 D の点 x に対して唯一つの y を返す．しかし，$x_1 \neq x_2 \in D$ に対して $f(x_1)=f(x_2)$ であることは構わない．(例 $y=\sin x, x>0$)

「$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1)\neq f(x_2)$」が正しいときは，$x \in D$ と $y \in f(D)$ は 1 対 1 に対応している．

つまり値域 $f(D)$ の任意の元 y に対して $f(x)=y$ を満たす $x \in D$ は一つしかなく，y を x に対応させる関数 $f^{-1}: f(D) \to D$ が $f^{-1}(y)=x$ と定まる．（これは今の場合 $f(x)=y$ と同値）f^{-1} を f の**逆関数**と言う．逆関数は一般には存在しない．（1 対 1 の対応が必要）

x, y を入れ替えて $y=f(x)$ の逆関数は $y=f^{-1}(x)$ であるということも多い．(関数は $y=F(x)$ とかくことが多い.）

例 1.2

1. $y=3x-2,\ (-1 \leq x \leq 1)$ は単調に増加しているので，同じ値は 2 度はとらない．値域は $-5 \leq y \leq 1$ である．この値域内のどんな y をとっても，$y=3x-2$ を x について解いて $x=\frac{y+2}{3}$ が $y=3x-2$ を満たす唯一つの $-1 \leq x \leq 1$ を満たす元である．

   よって，$y=3x-2\ (-1 \leq x \leq 1)$ の逆関数は $y=\frac{x+2}{3}$

2. $y=x^2+x-2\ (0 \leq x \leq 1)$ はやはりこの定義域の x について単調に増加しているので，同じ値は 2 度ととらない．値域は $-2 \leq y \leq 0$ である．よってこれも逆関数を持つ．この式を $-2 \leq y \leq 0$ のとき x について解くと

   $$x=\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+4(2+y)}\right)$$

   だが，定義域は $0 \leq x \leq 1$ だから，

   $$x=\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1+4(2+y)}\right)$$

   でないといけない．したがって逆関数は（x, y の役割を入れ替えて）

   $$y=\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1+4(2+y)}\right),\ (-2 \leq x \leq 0)$$

   となる．

1.5　分数関数

我々は $y = \frac{k}{x}$ という関数のグラフを描くことができる．これにさっき学んだ平行移動を使うと

$$y = \frac{k}{x-p} + q$$

と言う関数のグラフは，$y = \frac{k}{x}$ という関数のグラフを x 方向に p, y 方向に q だけ平行移動して得られる．

1.6　無理関数

$y = \sqrt{ax}$ は可能な定義域が $a > 0$ か $a < 0$ かで変わる．グラフの形も変わる．$-\sqrt{ax}$ はこれらを x 軸に関して対称移動すれば良い．これに平行移動を考えることで

$$y = \pm\sqrt{ax+b} + c$$

のグラフを考えることができる．

練習 1.3 $y = -\sqrt{-2x+3} + 2$ の定義できる x の範囲をいえ．また，そのグラフを書け．