11　偏微分

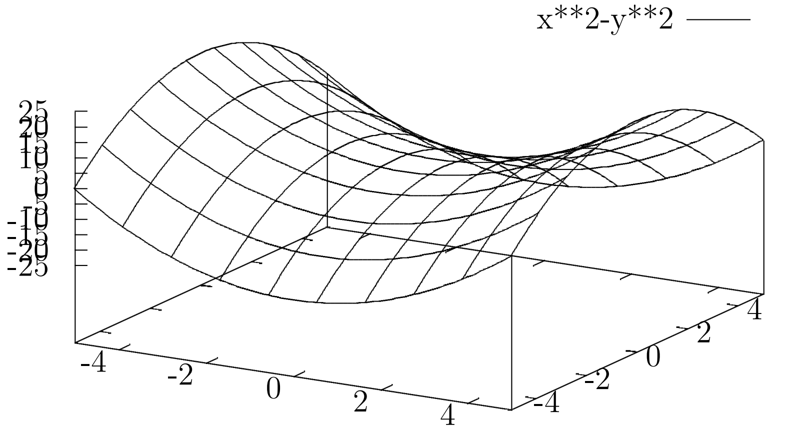
いよいよこれから変数がたくさんある関数について考えて行く．といっても，この様な関数は我々の身の回りに溢れている．例を挙げてみよう．

- 底面の底辺 a, 底面の三角形の高さ b, 高さ h の三角錐の体積 V は
$$V = \frac{1}{6}abh$$
となり， a, b, h の変数を持つ関数 $V = V(a, b, h)$
- 国語 J 点，英語 E 点，数学 M 点，理科 NS 点，社会 SS 点の時の総合点 T 点は
$$T = J + E + M + NS + SS$$
となり，J, E, M, NS, SS の変数を持つ関数 $T = T(JE, M, NS, SS)$

などがある．

11.1　2 変数関数のグラフ

多変数の関数の中でも一番考えやすい（だろう）2 変数の関数のグラフをひとつ描いてみる．最初の関数は $z = x^2 - y^2$ である．$-5 \leq x, y \leq 5$ の範囲で考えている．



11.2 関数の連続

定義 11.1 2 変数の関数 $f(x,y)$ が 点 (x_0,y_0) で連続であるとは，$x \to x_0, y \to y_0$ が同時に成り立つ時

$$f(x,y) \to f(x_0,y_0)$$

が常に成り立つ時に言う．

例 11.1 (教科書 p.167 例題 5.2)
次の関数は 点 $(0,0)$ で連続か？

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

解 $y=0$ のとき，つまり，(x,y) が x 軸上を $(0,0)$ に近づく時，

$$f(x,0) = 0 = f(0,0)$$

一方，$y \neq 0$ のときは分母分子を y^2 で割って，

$$|f(x,y)| = \frac{|y|}{1+(x/y)^2} \leq |y| \to 0 = f(0,0)$$

となり，確かに $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続になる．

連続な関数のグラフはやはりつながっている．

11.3 偏微分

y をいま $y=y_0$ と固定して，x だけを $x=x_0$ から少し変化した時，$f(x,y)$ がどのように変化するかは

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x,y_0) - f(x_0,y_0)$$

で与えられる．これが $x-x_0$ とどのような比になるかをみてみると，x 方向の平均変化率

$$\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

で与えられる．ここで， $x \to x_0$ としたとき，この比の値が何かある値 A に近づく時，つまり，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=A$$

となるとき， $f(x,y)$ は 点 (x_0,y_0) で**微分可能**であると言い，このとき，極限の値 A のことを $f(x,y)$ の点 (x_0,y_0) での x 方向の**偏微分係数** といい，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \text{または}\ f_x(x_0,y_0)$$

とかく．これは，実際には $f(x,y_0)$ という x の関数を x について微分するだけの事である．

記号 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ は，

1. y を定数と思う．
2. x の関数と思って普通に微分する．

の二つの事をやることを要求する記号である．

例 11.2 $f(x,y)=x^2-y^2$ の点 $(2,2)$ における x 方向の偏微分係数を求めてみる．

$$f(x,2)=x^2-4$$

だから，この $x=2$ における微分係数を求めればよく，したがって，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,2)=4$$

同様に，この点における y 方向の微分係数は，

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,2)=-4$$

となる．

いちいち $(2,2)$ を代入しないで，まっすぐ $f(x,y)=x^2-y^2$ を偏微分してみよう．x で偏微分する時は y は定数扱いするので，y^2 を x で偏

微分すると，0 になり， x^2 を x で偏微分するのは普通の微分と同じだから， $2x$ となる．したがって，結果として，

$$\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} = 2x$$

y で偏微分すると，

$$\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} = -2y$$

と計算でき，最後に， $(x, y) = (2, 2)$ を代入すれば良い．

例えば，

$$\frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

と計算すれば良い．

変数が 3 以上の時も，考え方は同じで，

> $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ は
>
> - x_1 以外の変数はみな定数として扱う．
> - x_1 については普通に微分する．

という約束で計算すれば良い．

練習 11.1 (教科書 p.170 問 5.3 (1),(2))
次の関数を x と y で偏微分せよ

(1) $f(x, y) = 4x^3y - 6x^2y^4$

(2) $f(x, y) = \log(2x - 5y)$