12　合成関数の微分

12.1　$f(x(t), y(t))$ の微分

定義 12.1 関数 $f(x, y)$ が C^1-級であるとは，偏導関数 f_x, f_y が存在して，しかも連続である時に言う．

定理 12.1 (教科書 p.180, 定理 5.5)
$z = f(x, y)$ が C^1-級で，$x = x(t), y = y(t)$ が t について微分可能ならば，$z = f(x(t), y(t))$ も t について微分可能で，

$$\frac{dz}{dt} = f_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t))\dot{y}(t)$$

が成り立つ．

証明　まず $z(t+h) - z(t)$ を変形する．

$$z(t+h)-z(t) = f(x(t+h), y(t+h))-f(x(t), y(t+h))+f(x(t), y(t+h))-f(x(t), y(t)) =: I+II$$

と書く． I については，$y(t+h)$ を定数と見ると $f(x, y(t+h))$ は x の関数で，平均値の定理により $x(t)$ と $x(t+h)$ の間に θ がとれて

$$I = f_x(\theta, y(t+h))\bigl[x(t+h) - x(t)\bigr]$$

と書くことができる．同様に $y(t)$ と $y(t+h)$ の間に θ' をとり、平均値の定理から

$$II = f_y(x(t), \theta')\bigl[y(t+h) - y(t)\bigr]$$

とできる． $h \to 0$ のとき， $x(t+h) \to x(t), y(t+h) \to y(t)$ だから，$\theta \to x(t), \theta' \to y(t)$ となるが，定理の仮定により f_x, f_y は連続なので，

$$f_x(\theta, y(t+h)) \to f_x(x(t), y(t)), \quad f_y(x(t), \theta') \to f_y(x(t), y(t))$$

となっている．よって，$h \to 0$ のとき

$$\frac{z(t+h) - z(t)}{h} \to f_x(x(t), y(t))\frac{dx(t)}{dt} + f_y(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dt}$$

□

12.2　$f(x(u,v),y(u,v))$ の偏微分：連鎖公式

定理 12.2 (教科書 p.182, 定理 5.6)

$z=f(x,y)$ が C^1 級で，$x=x(u,v), y=y(u,v)$ が u,v について偏微分可能ならば，$z=f(x(u,v),y(u,v))$ は u,v について偏微分可能で，次の**連鎖公式**が成り立つ．

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

が成り立つ．証明のやり方は t のときと同様．$h,k\to 0$ のとき

$$\frac{x(u+h,v)-x(u)}{h}\to\frac{\partial x}{\partial u},\quad \frac{x(u,v+k)-x(u)}{k}\to\frac{\partial x}{\partial v},$$

であることに注意.

例 12.1 (教科書 p.182, 例題 5.6)

$z=f(x,y)$ は C^1 級の関数とし，x,y が $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ で与えられるとき，次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2$$

解　簡単のため偏微分を f_x, f_y のように表す．連鎖公式により

$$z_r=z_xx_r+z_yy_r,\quad z_\theta=z_xx_\theta+z_yy_\theta$$

だから，

$$x_r=\cos\theta,\ y_r=\sin\theta,\ x_\theta=-r\sin\theta,\ y_\theta=r\cos\theta$$

を代入すると，

$$\begin{aligned}
z_r^2&=(z_xx_r+z_yy_r)^2=(z_x\cos\theta+z_y\sin\theta)^2\\
&=z_x^2\cos^2\theta+2z_xz_y\cos\theta\sin\theta+z_y^2\sin^2\theta\\
z_\theta^2&=(z_xx_\theta+z_yy_\theta)^2=(-z_xr\sin\theta+z_yr\cos\theta)^2\\
&=r^2\left(z_x^2\sin^2\theta-2+2z_xz_y\cos\theta\sin\theta+z_y^2\cos^2\theta\right).
\end{aligned}$$

よって，

$$z_r^2+\frac{1}{r^2}z_\theta^2=(z_x^2+z_y^2)(\cos\theta^2+\sin^2\theta)=z_x^2+z_y^2$$

例 12.2 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$で，$\varphi(r)$ は r の C^2 級関数とする時，$f(x,y,z)=\varphi(r)$ に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

を φ で表せ.（偏微分の順番は気にしないでよい）

解

$$f_x=\varphi'(r)r_x,\quad f_y=\varphi'(r)\frac{y}{r},\quad f_z=\varphi'(r)\frac{z}{r}$$

なので，

$$\begin{aligned} f_{xx}&=\varphi''(r)(r_x)^2+\varphi'(r)r_{xx}\\ f_{yy}&=\varphi''(r)(r_y)^2+\varphi'(r)r_{yy}\\ f_{zz}&=\varphi''(r)(r_z)^2+\varphi'(r)r_{zz}\end{aligned}$$

また，r の定義から $r^2=x^2+y^2+z^2$ なので，

$$\begin{aligned} rr_x=x\quad r_x=\frac{x}{r},\quad r_{xx}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3},\\ rr_y=y\quad r_y=\frac{y}{r},\quad r_{yy}=\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3},\\ rr_z=z\quad r_z=\frac{z}{r},\quad r_{zz}=\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3},\end{aligned}$$

となり，これを上の式に代入すると

$$\begin{aligned} f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}&=\varphi''(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}+\varphi'(r)(\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3})\\ &=\varphi''(r)+\frac{2}{r}\varphi'(r)\end{aligned}$$

練習 12.1 次の関係式で決まる w について w_t,w_s を求めよ.

(1) $w=x^2y;\quad x=st,\ y=s-t.$

(2) $w=x^2-y\log x;\quad x=s/t,\ y=s^2t.$

(3) $w=e^{x+y};\quad x=s\sin t,\ y=t\sin s.$

(4) $w=\log(x+y)-\log(x-y);\quad x=te^s,\ y=e^{st}$