13　多変数のテイラーの定理

13.1　高次偏導関数

1 変数の関数の時と同じ様に高階の偏導関数を考える事ができる．2 変数だと，2 次の導関数が 4 種類考えられる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) && x \text{ で 2 回偏微分} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) && y \text{ で偏微分してから } x \text{ で偏微分} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) && x \text{ で偏微分してから } y \text{ で偏微分} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) && y \text{ で 2 回偏微分}
\end{aligned}$$

これらは一般には違う関数である．$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ などをたくさん使うとスペースを取るので $\frac{\partial f}{\partial x}$ を簡単に f_x と書く方法もある．これだと $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f_y)_x = f_{yx}$ と書く事になる．

ただ，n 階の偏導関数を表すのは $\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$ の様に書く方が $f_{x_n \cdots x_1}$ と書くより分かりやすいかも知れない．

C^n-級の関数　1 変数の時と同じように，C^n 級関数を，次のように定義する．

定義 13.1 関数 $f(x,y)$ が n 次までのすべての偏導関数を持ち，かつ，これらの偏導関数がすべて連続の時，f は C^n **級の関数**であるという．

微分の順序交換　偏微分の順序がいつ交換できるかについては次の定理が良く知られている．

定理 13.1 領域 D で C^2 級の関数 $f(x,y)$ については

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

が成立する．

証明　$(a,b) \in D$ を任意にとってきて $f_{x,y}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ をいう．

$$g(x,y) = f(x,y) - f(x,b)$$

に対して平均値の定理を使うと，$b+k$ を定数と見て

$$g(a{+}h,b{+}k){-}g(a,b{+}k) = hg_x(a{+}\theta h,b{+}k) = h(f_x(a{+}\theta h,b{+}k){-}f_x(a{+}\theta h,b))$$

となり，再び平均値の定理により，

$$f_x(a+\theta h,b+k) - f_x(a+\theta h,b) = kf_{xy}(a+\theta h,b+\delta k)$$

とかけ，$0<\theta,\delta<1$ である．したがって

$$g(a+h,b+k) - g(a,b+k) = khf_{xy}(a+\theta h,b+\delta k)$$

いま，左辺は

$$f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)$$

と書けるので，$G(x,y) = f(x,y) - f(a,y)$ をつかって，同じ事をすると

$$\begin{aligned}
&f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)\\
&= G(a+h,b+k) - G(a+h,b) = kG_y(a+h,b+\delta' k)\\
&= k(f_y(a+h,b+\delta' k) - f_y(a,\delta' k)) = khf_{y,x}(a+\theta' h,b+\delta' k)
\end{aligned}$$

結局まとめると

$$f_{xy}(a+\theta h,b+\delta k) = f_{yx}(a+\theta' h,b+\delta' k)$$

という式を得る． $(0<\theta,\theta',\delta,\delta'<1)$ ここで，$k,h\to 0$ とすると，連続性から

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

が出る．

系 13.2 関数 $f(x,y)$ が，領域 D で C^n 級の時，n 階までの偏微分は偏微分の順番をどのように入れ換えても同じ値になる．例えば，f が D で C^3 級ならば，

$$f_{xxy}(x,y) = f_{xyx}(x,y) = f_{yxx}(x,y)$$

が成り立つ．

例 13.1 f が C^3 級の時は次のように定理を使ってすべての 3 階の偏微分が等しい事が言える．

$$f_{xxy} = (f_x)_{xy} = (f_x)_{yx} = f_{xyx} = (f_{xy})_x = (f_{yx})_x = f_{yxx}$$

例 13.2 (教科書 p.164 問 14) $f(x,y) = e^{ax}\cos(by)$ のとき $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ を求めよ.

解　e^{ax} は x に関して何回でも微分可能で，$\cos(by)$ も y に関して何回でも微分可能だから結果として $f(x,y) = e^{ax}\cos(by)$ は 任意の自然数 $n, m \geq 0$ に対して C^{n+m} 級で，上の定理から，微分の順番は交換可能だから

$$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^m e^{ax}}{\partial x^m}\frac{\partial^n \cos(by)}{\partial y^n} = a^m b^n e^{ax}\cos(by + \frac{n\pi}{2})$$

と計算すれば良い．最後のところは

$$\begin{cases} a^m(-1)^k b^{2k-1}\sin(by) & n = 2k-1 \text{ のとき} \\ a^m(-1)^k b^{2k}\cos(by) & n = 2k \text{ のとき} \end{cases}$$

と書いても良い.

13.2　テイラーの定理

1 変数の時のテイラーの定理は，関数 $f(x)$ が $x = a$ の近くで C^n 級ならば 適当に $0 < \theta < 1$ を選んで

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

とできると言うものであった．この多変数版を考える.

定理 13.3 (2 変数のテイラーの定理) 関数 $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ の領域 D で C^n 級とする．$(a,b) \in D$, $B((a,b);r) = \{(x,y) \in ; (x-a)^2 + (y-a)^2 < r^2\} \subset D$ とするとき，$(a+h, b+k) \in B((a,b);r)$ ならば，$0 < \theta < 1$ を適当に選ぶ事により,

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) =& f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b) \\ &+ \frac{1}{2}\big(h^2 f_{xx}(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)\big) + \ldots \\ &+ \frac{1}{n!}\Bigg(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a+\theta h, b+\theta k)h^n + \ldots \\ &+ \binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(a+\theta h, b+\theta k)h^i k^{n-i} + \ldots \\ &+ \binom{n}{n}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(a+\theta h, b+\theta k)k^n\Bigg) \end{aligned}$$

注意 13.1 上の式は長たらしいので，次のように略記する事が多い．

$$f(a+h,b+k)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(hD_x+k)D_y)^i}{i!}f(a,b)+\frac{(hD_x+kD_y)^n}{n!}f(a+\theta h,b+\theta k)$$

D_x は x による偏微分を表す．

証明のためには次の補題を用意しておくと良い．

補題 13.4 $f(x,y)$ が C^n 級で $x(t)=a+ht, y(t)=b+kt$ のとき，

$$F(t)=f(x(t),y(t))$$

に対して，

$$\frac{d^nF}{dt^n}(t)=(hD_x+kD_y)^nf(x,y)\Big|_{\substack{x=x(t)\\y=y(t)}}$$

証明 上の式右辺は普通の書き方をすると

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}h^ik^{n-i}\frac{\partial^nf}{\partial x^i\partial y^{n-i}}(x(t),y(t))$$

となる．$n=1$ のときは合成関数の微分により，

$$\begin{aligned}\frac{dF}{st}(t)&=f_x(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}+f_y(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}\\&=(hD_xf)(x(t),y(t))+(kD_yf)(x(t),y(t))=(hD_x+kD_y)f(x,y)\Big|_{\substack{x=x(t)\\y=y(t)}}\end{aligned}$$

なので，補題は $n=1$ のとき正しい．n まで正しいとして

$$\frac{d^{n+1}F}{dt^{n+1}}=\frac{d}{dt}\frac{d^nF}{dt^n}=(hD_x+kD_y)\frac{d^nF}{dt^n}=(hD_x+kD_y)(hD_x+kD_y)^nf(x,y)\Big|_{\substack{x=x(t)\\y=y(t)}}$$

により $n+1$ のときも正しい． □

定理 11.1 の証明 上の補題の $F(t)$ で $F(1)$ を $t=0$ で n 次までテイラー展開すると

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)&=F(1)\\&=F(0)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}\frac{d^iF}{dt^i}(0)+\frac{1}{n!}\frac{d^nF}{dt^n}(\theta)\end{aligned}$$

となる．これに補題 13.4 を代入すれば良い． □

練習 13.1 次の関数について $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ を確認せよ．

(1) $f(x,y)=2x^2y^3-x^3y^5$ (2) $f(x,y)=\tan(xy)$