3　微分

3.1　数列の極限

　数列 $\{a_n\}_{n\geq 1} = a_1, a_2, \ldots$ が与えられているものとする．

定義 3.1 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ が $n \to \infty$ のとき実数 a に **収束**するとは，n がいくらでも大きくなるとき $a_n - a$ は限りなく 0 に近づくことを言う．また，このとき

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

と書く．

この定義から

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

が言える．

例 3.1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 + 5n}{4n^3 - 8n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + 5n^{-2}}{4 - 8n^{-1}} = \frac{3}{4}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

3.2　関数の極限と連続

定義 3.2 関数 $y = f(x)$ について， x が定義域の中を動いて c に限りなく近づくとき,（c 自身は f の定義域になくてもよい）$f(x)$ が限りなくある実数 A に近づくならば「$x \to c$ のとき $f(x) \to A$ 」と書き，

$$\lim_{x\to c} f(x) = A$$

とも表す．

　関数 $f(x)$ の $x \to a$ の極限は，$x = a$ で分母がゼロにならないときはだいたい $f(a)$ に近づく．（連続関数はこの性質で定義される）

例 3.2

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - 4x + 3) = \lim_{x\to 2}(x-3)(x-1) = \lim_{x\to 2}(x-2)^2 - 1 = -1.$$

この例では，実際には x に 2 をそのまま代入した値と同じになっている．

3.2.1 連続関数

定義 3.3 関数 $f(x)$ が a で**連続である**とは,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つときにいう.

注意 3.1 もちろん, $f(x)$ が a で定義されていない場合もある. それでも $\lim_{x\to a} f(x)$ を考える事ができることもある. たとえば, $x \neq a$ のとき

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

と定義すれば, $x \neq a$ のとき約分できて $f(x) = x + a$ となるから,

$$\lim_{x\to a} f(x) = 2a$$

と極限がある事がわかる.

定理 3.1 (教科書 p.49 定理 3.1) $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ のとき

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a} cf(x) = c\alpha$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ ただし, $\beta \neq 0$

(5) $f(x) \leq g(x)$ がつねに成り立つならば $\alpha \leq \beta$

(4) は $\beta = 0$ のときは使えないが, これに加えて $\alpha = 0$ となるときは極限がある場合がある. 例えば, 分母分子が共通の因数 $(x - a)$ をもち, 分母分子をそれぞれこの共通因数で割ることにより極限が計算できることがある.

例 3.3 (教科書 p.49, 問 3.4(1))

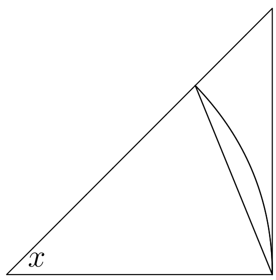
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 6x}{x^2 + 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - 6}{x + 3} = -2$$

例 3.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

を証明する．まず,（ラジアンを使って）面積を比較することにより

$$\frac{1}{2}\sin x\le\frac{1}{2}x\le\frac{1}{2}\tan x.$$



両辺を 2 倍して $x>0$ でわると

$$\frac{\sin x}{x}\le 1\le\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}.$$

整理して

$$\cos x\le\frac{\sin x}{x}\quad\text{(右側の不等式から)}$$

および

$$\frac{\sin x}{x}\le 1\quad\text{(左側の不等式から)}$$

となり，まとめて

$$\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le 1.$$

$x>0, x\to 0$ のとき，$\cos x\to\cos 0=1$ だから，はさみうちの原理により,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin x}{x}=1.$$

ところが, $\frac{\sin x}{x}$ は偶関数なので, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin x}{x}=1$ も成り立ち, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ がわかる.

例 3.4 により

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

がわかったので，これを使うと次のようなことも分かる

例 3.5

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

なぜなら，$x\to 0$ のとき

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}\to 1\cdot\frac{1}{2}$$

と計算できる.

3.3 微分係数と導関数

定義 3.4 $x\to a$ のとき，極限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

があれば，関数 $f(x)$ は $x=a$ で **微分可能** であるといい，この極限の値を $f'(a)$ または $\frac{df}{dx}(a)$ とかき，$f(x)$ の $x=a$ における **微分係数** という.

定義 3.5 $f(x)$ が，区間 $[a,b]$ 内のどの点においても微分可能なとき，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で微分可能であるといい，任意の $[a,b]$ 内の点 x に対して，x での微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数を $f(x)$ の **導関数** といい， $f'(x)$ または $\frac{df}{dx}(x)$ で表す.

練習 3.1 (教科書 p.51 問 3.6) 次の極限を調べよ

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-1}}{3x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$

練習 3.2 次の極限を調べよ

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$