

6 関数の増減

関数の増減表については，高等学校で勉強済みではあるが，平均値の定理を用いて論理的に推論してみる．

6.1 平均値の定理

定理 6.1 (教科書 p.56 定理 3.3)

$a < b$ を実数とするととき，閉区間 $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ の各点で連続な関数は必ずこの区間内に最大値と最小値をとる点をもつ

この定理は直観的には明らかだが，証明しようとするとき実数の性質に踏み込むので，この講義では証明せずに認める．

定理 6.2 (Rolle の定理 : 教科書 p.82 定理 3.14)

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で， $a < x < b$ となる各点 x で微分可能なとき， $f(a) = f(b)$ ならば， $f'(c) = 0$ および $a < c < b$ をみたす点 c が必ずある．

証明 とにかく $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続なので，定理 6.1 により，この区間で最大値と最小値をとる．このどちらも $f(a) = f(b)$ と等しいなら，この区間で $f(x)$ は定数となり，このとき $a < x < b$ となるどの点でも

$$f'(x) = 0$$

となるので，定理は正しい．どちらかが $f(a)$ と違うとして良い．どちらでも議論は同じように出来るので，最大値が $f(a) = f(b)$ より大きいとする．最大値をとる点を c とすると，

$$f(c) > f(a) = f(b)$$

$c \neq a, b$, i.e.¹, $a < c < b$ したがって仮定より $f'(c)$ がある．

そこで， $f'(c) = 0$ を示せば定理は証明できる． $f(c)$ が最大値なので，任意の $h > 0$ に対して $a < c - h < c + h < b$ のとき

$$f(c + h) - f(c) \leq 0, \quad f(c - h) - f(c) \leq 0$$

¹ラテン語 id est の省略 ; that is と同じ

これより,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{f(c-h) - f(c)}{-h} \geq 0$$

ここで, $h \rightarrow 0$ ($h > 0$) とすると,

$$f'(c) \leq 0, \quad \text{かつ} \quad f'(c) \geq 0$$

となり, $f'(c) = 0$ がわかる. □

定理 6.3 (平均値の定理: 教科書 p.81 定理 3.13)

閉区間 $[a, b]$ で連続で, $a < x < b$ となる任意の x で微分可能な関数 $f(x)$ について, $a < c < b$ となる c で

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を満たすものがある.

証明

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

とおくと, $g(b) = g(a) = f(a)$ なので, Rolle の定理から $g'(c) = 0$ となる c が $a < c < b$ を満たすように見つかる. ところが

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

だからこの c が求めるもの. □

6.1.1 平均値の定理からわかること

$f(x)$ は微分可能としておく.

1. $a < x < b$ で $f'(x) > 0$ ならば, $f(x)$ はこの区間で単調増加

なぜなら, $a < x < y < b$ のとき, 平均値の定理で $x < c < y$ となる c で,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0$$

となるので, これは $f(x) < f(y)$ を意味している.

2. $a < x < b$ で $f'(x) < 0$ ならばこの区間で $f(x)$ は単調減少

なぜなら, $a < x < y < b$ のとき, 平均値の定理で $x < c < y$ となる c で,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) < 0$$

となるので, これは $f(x) > f(y)$ を意味している.

3. $a < c < b$ となる点 c で $f(x)$ が最大値または最小値をもてば, $f'(c) = 0$

証明は Rolle の定理の証明と同じ.

6.2 関数の増減と極値

定義 6.1 区間 $[a, b]$ で f' の符号が点 c の近くで正から負に変わる時, 関数 f は増加から減少に変わるので, c のごく近い区間では $f(c)$ は最大になる. だが, 全体の区間 $[a, b]$ では最大値でも最小値でもないこともある. とにかく, この様にその点のごく近くをみると, $f(x)$ が最大または最小になるとき, この点での f の値を f の極値という. 上の 3. から極値をとる点では f' の値は 0 になる. その点の近くで最大値となる極値を極大値, 最小値となる極値を極小値と呼ぶ.

6.2.1 関数の凹凸と 2 階導関数

$f''(x)$ がある区間で正なら $f'(x)$ は上のことからこの区間で単調増加になり, $y = f(x)$ のグラフは下に凸になる. $f''(x)$ がこの区間で負ならば $f'(x)$ は単調減少で, $y = f(x)$ のグラフは上に凸(下に凹)という. $f''(x)$ の符号が入れ替わる点では関数の凹凸が入れ替わり, この様な点を変曲点という. 変曲点では $f''(x) = 0$ となっている.

例 6.1 (教科書 p.87 問 3.35) $f(x) = \cos x + x \sin x$ の増減と凹凸を $0 \leq x \leq \pi$ で調べよう.

$$f'(x) = -\sin x + \sin x + x \cos x = x \cos x$$

また

$$f''(x) = \cos x - x \sin x$$

なので，極値は $x = 0, \frac{\pi}{2}$ にとる．

$$f''(0) = 1 > 0, \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$$

より， $x = 0$ では極小値 1 ， $x = \frac{\pi}{2}$ では極大値 $\frac{\pi}{2}$ をとっている．増減と凹凸は x^* を $\tan x = 1/x$ の $0 < x < 1$ における唯一つの解とすると，

x	0	...	x^*	...	$\frac{\pi}{2}$...	π
$f'(x)$	0	+	+	+	0	-	$-\pi$
$f''(x)$	+	+	0	-	-	-	-1
$f(x)$	1	↗	変曲点	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	-1

練習 6.1 (教科書 p.90 問 3.38(1), p.94 問 3.40(2))

(1) $y = -x^4 + x^2 - 1$ の極値と凹凸を調べグラフの概形を描け．

(2) $y = x^2 e^{-x}$ の極値と凹凸を調べグラフの概形を描け．