9　積分の計算

9.1　置換積分

合成関数の微分を逆にたどる．不定積分でも定積分ででも計算のやり方は同じなので，定積分で公式を示しておく．

定理 9.1 関数 $t(x)$ が微分可能で，$t(c) = a < t(d) = b$ とするとき，連続な関数 $f(t)$ に対して，

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^d f(t(x))t'(x)dx$$

証明　$F(t)$ を $f(t)$ の原始関数とするとき，$h(x) = F(t(x))$ を微分すると，

$$h'(x) = F'(t(x))t'(x) = f(t(x))t'(x)$$

だから，これを x について c から d まで積分すると，

$$h(c) - h(d) = \int_c^d f(t(x))t'(x)\,dx$$

であるが，左辺は $F(t(d)) - F(t(c)) = F(b) - F(a)$ と等しいので，定積分で書いて，

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt = \int_c^d f(t(x))t'(x)\,dx$$

が成り立つ．　□

例 9.1

$$\int_0^1 e^{3x+2}dx$$

を計算する．$u = 3x + 2$ とすると，この式を u で微分して $1 = 3dx/du$ である．また，x が 0 から 1 まで動くとき u は 2 から 5 まで動き，

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{3x+2}\,dx &= \int_2^5 e^t \frac{dx}{du}\,du = \frac{1}{3}\int_2^5 e^t\,du \\ &= \frac{1}{3}\big[e^t\big]_2^5 = \frac{e^5 - e^2}{3}\end{aligned}$$

例 9.2

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

を計算する． $t(x) = x^2 + x + 1$ とおくと，$t'(x) = 2x + 1$ だから，

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{t'(x)}{t(x)}\,dx$$

$t(0) = 1, t(1) = 3$ だから，$f(t) = 1/t$ に対して上の公式が使えて，

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{t}\,dt = \log 3$$

と計算できる．

例 9.3 (教科書 p.124, 例題 4.4) これは不定積分の場合の例

(1)

$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{x}dx &= \int t\frac{dt}{dx}dx \quad (t = \log x \text{ と変数変換}) \\ &= \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C \\ &= \frac{1}{2}(\log x)^2 + C\end{aligned}$$

(2)

$$\int \frac{x^2}{(2x-1)^2}\,dx$$

を計算する． $t = (2x - 1)$ とおくと，$x = (t + 1)/2$ なので $dx/dt = 1/2$ だから，

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(2x-1)^2}\,dx &= \int \frac{(t+1)^2}{4t^2}\frac{dx}{dt}dt \\ &= \frac{1}{8}\int\left(1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right)\,dt \\ &= \frac{1}{8}\left(t + 2\log|t| - \frac{1}{t}\right) + C \\ &= \frac{1}{8}\left((2x-1) + 2\log|2x-1| - \frac{1}{2x-1}\right) + C\end{aligned}$$

9.2 部分積分

定理 9.2 (不定積分の部分積分の公式) 教科書 p.128 定理 4.8 $F'(x) = f(x)$ とするとき,

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

証明 積の微分公式を $F(x)g(x)$ に対して用いると,

$$\{F(x)g(x)\}' = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

となるので，右辺の不定積分は $F(x)g(x) + C$ となる．したがって,

$$F(x)g(x) + C = \int f(x)g(x)\,dx + \int F(x)g'(x)\,dx$$

となり，移項して

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx + C$$

定数 C は不定積分 $\int F(x)g'(x)\,dx$ に入れてしまってよいので,

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

と書ける． □

例 9.4 教科書 p.129 問 4.13 (1) および例題 4.8 (2)

(1) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$ を計算する．

$(-\cos x)' = \sin x$ だから，上で $f(x) = \sin x, g(x) = x$ とおくと

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

(2) $x > 0$ として，$\displaystyle\int \log x\,dx$ を計算する．

$$\int \log x\,dx = \int 1\cdot\log x\,dx = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + C$$

定理 9.3 (定積分の部分積分) 教科書 p.130 定理 4.9

$F'(x) = f(x)$ のとき，

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

例 9.5

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e-1) = 1$$

練習 9.1 次の不定積分を計算せよ．(1),(3) は 置換積分．(2) は部分積分.

(1) $\displaystyle\int \cos^3 x dx$ (2) $\displaystyle\int xe^x dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} dx$