2.6 伊藤の公式の証明

定理 2.17 (**伊藤の公式**) f が C^2 級の関数の時，(??) の確率過程 $X(t)$ に対して，次の式が $a.s.$ で成立する．

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t \left\{ b(s,\omega) f'(X(s)) + \frac{1}{2} a(s,\omega)^2 f''(X(s)) \right\} ds + \int a(s,\omega) f'(X(s)) dB(s) \tag{2.12}$$

証明

$$\tau_N = \inf\{t \geq 0\,;\left|\int_0^t a(s)dB(s)\right| > N, \text{ or } \int_0^t |b(s)|ds > N, \text{ or } \int_0^t a^(s)^2 ds > N\}$$

と置く．

$$X_N(t) = \begin{cases} 0, & |X(0)| > N \text{ のとき} \\ X(t \wedge \tau_N), & |X(0)| \leq N \text{ のとき} \end{cases}$$

とすると，$|X_N(t)| \leq 3N$ なので，$f(X_N(t))$ を考えると，この時は f, f', f'' の変数は $\{|x| \leq 3N\}$ を考えれば良いので，f は C_b^2 の元と思ってよい．
$X_N(t)$ も伊藤過程であることは

$$\int_0^{t\wedge\tau_N} a(s)dB(s) = \int_0^t 1_{[0,\tau_N]}(s) a(s) dB(s)$$

とかけるからわかる．(ds 積分についても同じ理由)

任意の $N \geq 1$ で $X = X_N$ に対して (2.12) が成り立っているとすると，確率積分と積分の連続性から $N \to \infty$ のとき $\tau_N \to \infty$ であることがわかり，これは X 自身について (2.12) が成り立つことを言っている．

したがって，以下では有界性

$$\max\left\{\left|\int_0^t a(s)dB(s)\right|, \int_0^t |b(s)|ds, \int_0^t a^2(s)ds\right\} \leq N \tag{2.13}$$

を仮定してよいことを注意しておく．

任意に $t > 0$ を固定する．$\Delta = \{t_k^{(n)}; 0 \leq k \leq \beta(n)\}$ は $[0,t]$ の分割で，$n \to \infty$ のとき $|\Delta| \to 0$ となるものとする．

$$f(X(t)) - f(X(0)) = \sum_{k=1}^{\beta(n)} \left[f(X(t_j^{(n)})) - f(X(t_{j-1}^{(n)})) \right]$$

として，各 j において 2 次まで Taylor 展開.

$$\begin{aligned}f(X(t_j^{(n)})) - f(X(t_{j-1}^{(n)})) = f'(X(t_{j-1}^{(n)}))[X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})] + \\ + \frac{1}{2} f''(\theta_j^{(n)})[X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})]^2.\end{aligned}$$

右辺第 1 項の和を I, 第 2 項の和を II とかく.

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f'(X(t_{j-1}^{(n)}))\big[X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})\big] \\
&= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f'(X(t_{j-1}^{(n)})) \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} b(s,\omega) ds + \sum_{j=1}^{\beta(n)} f'(X(t_{j-1}^{(n)})) \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega) dB(s) \\
&= \int_0^t f'(X(s)) b(s,\omega) ds + \int_0^t f'(X(s)) a(s,\omega) dB(s) \\
&+ \sum_{j=1}^{\beta(n)} \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \big[f'(X(t_{j-1}^{(n)})) - f'(X(s))\big] b(s,\omega) ds \\
&+ \sum_{j=1}^{\beta(n)} \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \big[f'(X(t_{j-1}^{(n)})) - f'(X(s))\big] a(s,\omega) dB(s) \\
&=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

I_1 と I_2 は (2.12) の右辺に現れている.

$n \to \infty$ のとき $I_3 \to 0$ (t について広義一様)a.s. が成り立つ．なぜなら，$f'(X(t))$ は t について一様連続なので，

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\beta(n)} \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \big[f'(X(t_{j-1}^{(n)})) - f'(X(s))\big] b(s,\omega) ds \\
\le\ &\Big(\sup_{\substack{|u-v| \le 2^{-n}, \\ u,v \in [0,T]}} |f'(X(u)) - f'(X(v))| \Big) \int_0^t |b(s,\omega)| ds.
\end{aligned}$$

右辺は t について広義一様に 0 に収束する.

$I_4 \to 0 \quad in\ L^2(P)$ である．なぜなら，定理 **??** により，

$$E(I_4^2) = \sum_{j=1}^{\beta(n)} E \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \left[f'(X(t_{j-1}^{(n)})) - f'(X(s))\right]^2 a(s,\omega)^2 ds.$$

f' が有界かつ連続なことと，X の連続性から有界収束定理により右辺は 0 に収束．以上より，I は $n \to \infty$ のとき

$$\int_0^t a(s,\omega) f'(X(s)) dB(s) + \int_0^t b(s,\omega) f'(X(s)) ds$$

に収束．(この収束は少なくとも確率収束)

II の計算に移ろう．

$$\begin{aligned}
2II &= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)}) \Big[X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})\Big]^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)}) \left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega) dB(s)\right)^2 \\
&+ 2 \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)}) \left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega) dB(s)\right) \left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} b(s,\omega) ds\right) \\
&+ \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)}) \left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} b(s,\omega) ds\right)^2 \\
&:= II_1 + II_2 + II_3
\end{aligned}$$

f'' の一様連続性と，(2.13)　および確率積分の連続性により，$n \to \infty$ のとき，$II_2, II_3 \to 0 \ \ a.s.$ は簡単にわかる．II_1 の収束を計算するために補題を一つ用意する．

補題 2.18 $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール $M(t)$ が $|M(t)| \le N$ を任意の $t > 0$ に対して満たしているとする．このとき、任意の $t > 0$ と $[0,t]$ の任意の分割 Δ:

$$\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < \beta(n) = t\}$$

に対して

$$E\left[\{\sum_{j=1}^{\beta(n)} (M(t_j) - M(t_{j-1}))^2\}^2\right] \le \quad 12C^4$$

が成り立つ。

証明

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{j=1}^{\beta(n)} E\left[(M(t_j)-M(t_{j-1}))^4\right] \\
&\quad + 2\sum_{j=1}^{\beta(n)-1}\sum_{k=j+1}^{\beta(n)} E\left[(M(t_j)-M(t_{j-1}))^2(M(t_k)-M(t_{k-1}))^2\right]
\end{aligned}
$$

$$=: A+B$$

と書く．有界性の仮定により，

$$|A| \le 4C^2 E\left[\sum_{j=1}^{\beta(n)}(M(t_j)-M(t_{j-1}))^2\right]$$

だが，各 j においてマルチンゲール性から

$$E\left\{((M(t_j)-M(t_{j-1}))^2\right\} = E(M(t_j)^2 - M(t_{j-1})^2)$$

となるので，

$$|A| \le 4C^2E(M(t)^2 - M(0)^2) \le 4C^4.$$

同様に，$k \ge j+1$ のとき

$$E\left[(M(t_k)-M(t_{k-1}))^2 \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right] = E\left[M(t_k)^2 - M(t_{k-1})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right]$$

だから，

$$
\begin{aligned}
|B| &\le 2\sum_{j=1}^{\beta(n)-1}\sum_{k=j+1}^{\beta(n)} E\left\{E\left[M(t_k)^2 - M(t_{k-1})^2\middle|\mathcal{F}_{t_j}\right](M(t_j)-M(t_{j-1}))^2\right\} \\
&= 2\sum_{j=1}^{\beta(n)-1} E\left\{(M(t)^2 - M(t_j)^2)(M(t_j)-M(t_{j-1}))^2\right\} \\
&\le 4C^2\sum_{j=1}^{\beta(n)-1} E\left\{(M(t_j)-M(t_{j-1}))^2\right\} \\
&= 4C^2E(M(t)^2 - M(0)^2) \le 8C^4.
\end{aligned}
$$

□

さて、定理の証明に戻ろう。

$$\begin{aligned} II_1 &= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(X(t_{j-1}^{(n)}))\left[\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j-1}^{(n)}} a(s,\omega)dB(s)\right]^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\beta(n)} [f''(\theta_j^{(n)}) - f''(X(t_{j-1}^{(n)}))]\left[\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j-1}^{(n)}} a(s,\omega)dB(s)\right]^2 \\ &:= II_{1,a} + II_{1,b} \end{aligned}$$

$E|II_{1,b}| \to 0$ である．なぜなら，

$$\begin{aligned} E|II_{1,b}| &\leq \left(E\big[\sup_{\substack{u,v\in[0,t]\\|u-v|\leq 2^{-n}}} |f''(X(u)) - f''(x(v))|\big]^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times\left(E\big[\sum_{j=1}^{\beta(n)}(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s)dB(s))^2\big]^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

補題 2.18 および $f''(X(s))$ の有界性と一様連続性により $E|II_{1,b}|$ は 0 に収束する．$II_{1,a}$ の代わりに

$$III = \sum_j f''(X(t_{j-1}^{(n)}))\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)^2 ds$$

を考えると、これは $f''(X(s))$ の連続性から $n \to \infty$ のとき

$$\int_0^t f''(X(s))a(s)^2 ds$$

に収束する。あとは $E\left[|II_{1,a} - III|^2\right] \to 0$ を示せば良い．定理 **??** の等長性により

$$\left(\int_0^t a(s)dB(s)\right)^2 - \int_0^t a(s)^2 ds$$

が $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールであるので、

$$\begin{aligned} &E\left[|II_{1,a} - III|^2\right] \\ &= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(X(t_{j-1}))^2\left(\Big(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)dB(s)\Big)^2 - \int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)^2 ds\right)^2 \end{aligned}$$

$$\le 2\sum_{j=1}^{\beta(n)} E\left[f''(X(t_{j-1}))^2\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)dB(s)\right)^4\right]$$
$$+\,2\sum_{j=1}^{\beta(n)} E\left[f''(X(t_{j-1}))^2\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)^2ds\right)^2\right]$$
$$=: IV_a + IV_b$$

IV_a, IV_b は II_2, II_3 と同じように 0 に収束する. $\Box$