1.3　連続性

確率過程の連続性については，有名な Kolmogorov の連続性条件がある．この定理を正確に理解するためには無限次元空間上の確率測度についての知識が必要になるが，ここでは省略する．二つの確率過程 $X(t), Y(t)$, $(t \in [0, \infty)$ は,

$$P(X(t) \neq Y(t)) = 0$$

がすべての $t \in [0, \infty)$ について成り立つとき，**同値**であると言い，同値な確率過程は同一視する．

定理 1.3 (Kolmogorov **の連続性定理**) 確率過程 $\{X(t)\ ;\ t \in [0, \infty)\}$ が，ある $\alpha, \beta, \gamma > 0$ と任意の $t, s \in [0, \infty)$ $(s < t)$ に対して

$$E\left(|X(t) - X(s)|^{\alpha}\right) \leq \beta |t - s|^{1+\gamma} \tag{1.3}$$

を満たすならば，X と同値な確率過程 Y で,

$$P(\{\omega\ ;\ Y(t, \omega) \text{ は } t \in [0, \infty) \text{ の連続関数 }\}) = 1$$

となるものが存在する（つまり，同一視の意味で X が連続と思って良い）．

証明 $X(t)$ を 2 進有理点の時刻の全体

$$\mathbf{D} = \{\frac{k}{2^n}; k = 0, 1, \ldots\ ;\ n = 0, 1, \ldots\}$$

に制限した確率過程 $X^{\mathbf{D}}(t)$ が，任意の $T > 0$ に対し，確率 1 で $[0, T] \cap \mathbf{D}$ 上で一様に連続なことをまず示す．このとき,

$$\begin{aligned}
& P\left(\{\omega\ ;\ \ X^{\mathbf{D}}(t; \omega) \text{ は，任意の区間 } [0, T] \cap \mathbf{D} \text{ 上で一様連続 }\}\right) \\
= \ & \lim_{T \to \infty} P\left(\{\ X^{\mathbf{D}}(t; \omega) \text{ は，} [0, T] \cap \mathbf{D} \text{ 上で一様連続 }\}\right) \\
= \ & 1
\end{aligned} \tag{1.4}$$

となることに注意する．

任意に自然数 T をとめておく．$n, k \geq 1$ に対して，条件より,

$$E\left(|X^{\mathbf{D}}(\frac{k+1}{2^n}) - X^{\mathbf{D}}(\frac{k}{2^n})|^{\alpha}\right) \leq \beta 2^{-n(1+\gamma)} \tag{1.5}$$

を得る．Chebyshev の不等式（補題 1.1）により，

$$P(|X^{\mathbf{D}}(\frac{k+1}{2^n}) - X^{\mathbf{D}}(\frac{k}{2^n})| \geq 2^{-\delta n}) \leq 2^{-n(1+\gamma-\delta\alpha)}$$

となるので，ここで $\delta = \dfrac{\gamma}{2\alpha} > 0$ ととると，上式右辺は $2^{-n(1+\frac{\gamma}{2})}$ となる．上式左辺の事象を $A_n(k)$ と書くと，

$$\begin{aligned} & P(\max_{0\leq k\leq T2^n-1} |X^{\mathbf{D}}(\frac{k+1}{2^n}) - X^{\mathbf{D}}(\frac{k}{2^n})| \geq 2^{-\delta n}) \\ = \ & P(\bigcup_{0\leq k\leq T2^n-1} A_n(k)\ ) \leq T2^{-\frac{n\gamma}{2}} \end{aligned}$$

$B_n = \{\max_{0\leq k\leq T2^n-1} |X^{\mathbf{D}}(\frac{k+1}{2^n}) - X^{\mathbf{D}}(\frac{k}{2^n})| \geq 2^{-\delta n}\} = \bigcup_{0\leq k\leq T2^n-1} A_n(k)$ と書くと，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} T2^{-\frac{n\gamma}{2}} < \infty.$$

だから，Borel-Cantelli の補題（補題 1.2）により，確率 1 で B_n は有限回しか起こらない．すなわち，確率 1 の ω に対して，ある $N = N(\omega) \in \mathbf{N}$ が存在し，$n \geq N$ ならば 任意の $0 \leq k \leq T2^n - 1$ に対して

$$|X((k+1)2^{-n}) - X(k2^{-n})| < 2^{-\delta n} \tag{1.6}$$

が成り立っている．

いま，このような ω を一つとめ，$X(t) = X(t,\omega)$ が $[0,T]\cap\mathbf{D}$ で一様連続であることを示す．これにはある定数 $C > 0$ がとれて，$s,t \in \mathbf{D}\cap[0,T], s < t$ を $|t-s| < 2^{-N}$ とするとき，

$$|X(t) - X(s)| < C|t-s|^{\delta} \tag{1.7}$$

となることを示せば十分．$m \geq 1$ を

$$2^{-(N+m)} \leq |t-s| < 2^{-(N+m-1)}$$

を満たすようにとると，$[s,t]$ には $k2^{-(N+m)}$ の形の点が少なくとも 1 個，多くとも 2 個存在する．(3 つあると $|t-s| \geq 2^{-(N+m-1)}$ ）以下の議論はどちらでも同様なので，2 個あるとしてこれらを

$$t_1 = j2^{-(N+m)},\ t_2 = (j+1)2^{-(N+m)}$$

と書くことにする．このとき，$|t_1 - s| < 2^{-(N+m)}, |t - t_2| < 2^{-(N+m)}$ でないといけない。$t_1 - s, t - t_2$ をそれぞれ 2 進法展開すると，

$$t_1 - s = \sum_{p=1}^{\ell_1} \varepsilon_p 2^{-(N+m+p)}, \quad t - t_2 = \sum_{p=1}^{\ell_2} \tilde{\varepsilon}_p 2^{-(N+m+p)}$$

と書ける．ただし，$\varepsilon_p, \tilde{\varepsilon}_p \in \{0,1\}$ である．このとき，(1.6) により，

$$\begin{aligned}
|X(t_2) - X(t_1)| &\leq 2^{-\delta(N+m)} = |t_2 - t_1|^\delta \leq |t-s|^\delta \\
|X(t_1) - X(s)| &\leq \sum_{q=1}^{\ell_1} |X(t_1 - \sum_{p=1}^{q-1} \varepsilon_p 2^{-(N+m+p)}) - X(t_1 - \sum_{p=1}^{q} \varepsilon_p 2^{-(N+m+p)})| \\
&\leq \sum_{q=1}^{\ell_1} \varepsilon_q 2^{-\delta(N+m+q)} \\
&\leq 2^{-\delta(N+m)}(1-2^{-\delta})^{-1} \leq (1-2^{-\delta})^{-1}|t-s|^\delta
\end{aligned}$$

を得る．同様に

$$\begin{aligned}
|X(t) - X(t_2)| &\leq \sum_{q=1}^{\ell_2} |X(t - \sum_{p=1}^{q-1} \tilde{\varepsilon}_p 2^{-(N+m+p)}) - X(t - \sum_{p=1}^{q} \tilde{\varepsilon}_p 2^{-(N+m+p)})| \\
&\leq \sum_{q=1}^{\ell_2} \tilde{\varepsilon}_q 2^{-\delta(N+m+q)} \\
&\leq (1-2^{-\delta})^{-1}|t-s|^\delta
\end{aligned}$$

なので，これらをあわせると

$$|X(t) - X(s)| < 3(1-2^{-\delta})^{-1}|t-s|^\delta$$

となり，(1.7) が示せた．T についての共通部分をとることにより $X(t)$ は確率 1 で 任意の $[0,T] \cap \mathbf{D}$ において一様連続なことが分かる．

次に，$X^{\mathbf{D}}(t,\omega)$ が，任意の区間 $[0,T]$ 上で一様連続な ω に対しては，

$$Y(t,\omega) := \lim_{\substack{r \to t, \\ r \in \mathbf{D}}} X(r,\omega)$$

が任意の $t \in [0,\infty)$ に対して定義出来る．

そうでない ω に対しては，$Y(t,\omega) := 0$ と定義すると，$Y(t,\omega)$ は，任意の $\omega \in \Omega$ に対して $[0,\infty)$ 上の連続関数となっていることを示そう．

$r, r' \in \mathbf{D} \cap [0,T]$ として (1.7) を使うと,

$$|X(r) - X(r')| < C|r - r'|^{\delta}$$

ここで $r, r' \in \mathbf{D} \cap [0,T]$ を保ちながら $r \to s, r' \to t$ とすると $X(r) \to Y(s), X(r') \to Y(t)$ だから

$$|Y(s) - Y(t)| \leq C|t - s|^{\delta}$$

したがって Y は確率 1 で任意の $[0,T]$ 上で一様連続.

X が (1.7) を満たさないところでは $Y \equiv 0$ だから Y はもちろん一様連続で, したがってすべての ω で $Y(t,\omega)$ は t の連続関数（任意の T に対して $[0,T]$ 上で一様連続).

練習問題 1.2 上の X と Y が同値であることを証明せよ．つまり，任意の $t \in [0,\infty)$ に対して

$$P\left(X(t) \neq Y(t)\right) = 0$$

を示せ.

系 1.4 一次元 *Brown* 運動は連続な確率過程である.

証明 Brown 運動の定義から，$0 \leq s < t$ のとき,

$$E\left[|B(t) - B(s)|^4\right] = 3(t-s)^2$$

だから，定理 1.3 により Brown 運動は連続な確率過程となる.