定理 2.6 (Doob の任意抽出定理–離散時間)

$\{X(n)\}$ を $(\mathcal{F}_n)$-マルチンゲールとするとき T が確率 1 で有限な $(\mathcal{F}_n)$-停止時刻なら $X(T \wedge n, \omega) = X(T(\omega) \wedge n, \omega)$ は $(\mathcal{F}_n)$-マルチンゲールでもあるし，$\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{T\wedge n}$-マルチンゲールでもある．

さらに，T, S が $T \geq S$ を満たす有界な $(\mathcal{F}_n)$-停止時刻なら

$$E(X(T) \mid \mathcal{F}_S) = X_S \qquad a.s.$$

証明 まず，T が有界な $(\mathcal{F}_n)$-停止時刻のとき次の式が成り立つことに注意しよう．$T \leq N$ とする．

$$X(T(\omega), \omega) = X(0, \omega) + \sum_{n=1}^{N} 1_{\{T \geq n\}}(\omega)\left(X(n, \omega) - X(n-1, \omega)\right).$$

$\{T \geq n\} = \{T \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$ であるので，$k \geq n$ ならば

$$E\left(1_{\{T \geq n\}}\left(X(n) - X(n-1)\right) \mid \mathcal{F}_k\right) = 1_{\{T \geq n\}}\big(X(n) - X(n-1)\big)$$

また，$\{T \geq n\} = \{T \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$ だから，

$$E\left(1_{\{T \geq n\}}(X(n) - X(n-1)) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = 1_{\{T \geq n\}}\left(E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}\right) = 0.$$

さらに，$k < n-1$ のときは任意の可積分な Y に対して

$$E(Y \mid \mathcal{F}_k) = E\left(E(Y \mid \mathcal{F}_{n-1})\middle|\mathcal{F}_k\right)$$

である．これは定義 2.1 により，任意の $B \in \mathcal{F}_k$ に対して，

$$\int_B Y(\omega) P(d\omega) = \int_B E(Y \mid \mathcal{F}_{n-1}) P(d\omega) \tag{2.3}$$

ということと同じである．（条件付き期待値の **tower property** と呼ぶ性質である.）

これより，$B \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{n-1}$ に注意すれば，定義 2.1 により (2.3) は明らかに成り立っている．Y として $1_{\{T\geq n\}}(X(n) - X(n-1))$ を取ると，$k \leq n-1$ のとき

$$E\left(1_{\{T \geq n\}}\left(X(n) - X(n-1)\right) \mid \mathcal{F}_k\right) = E\left(E(Y \mid \mathcal{F}_{n-1}) \,\middle|\, \mathcal{F}_k\right) = 0$$

となり，

$$\begin{aligned} E(X(T) \mid \mathcal{F}_k) &= \sum_{n=1}^{k} 1_{\{T \geq n\}} (X(n) - X(n-1)) \\ &= \begin{cases} X(k,\omega) & k \leq T(\omega) \text{ のとき,} \\ X(T(\omega),\omega) & k \geq T(\omega) \text{ のとき,} \end{cases} \\ &= X(T \wedge k) \end{aligned}$$

となるが，最初から T の代わりに $T \wedge n$ を使うと左辺は $E(X(T \wedge n) \mid \mathcal{F}_k)$ となり，求める式を得る．$X(T \wedge n)$ は $\mathcal{F}_{T\wedge n}$-可測であり，$\mathcal{F}_n \supset \mathcal{F}_{T\wedge n}$ だから条件付き期待値の tower property により，$n \geq k$ のとき

$$E(X(T \wedge n) \mid \mathcal{F}_{T\wedge k}) = E\left(E(X(T \wedge n) \mid \mathcal{F}_k) \mid \mathcal{F}_{T\wedge k}\right) = X(T \wedge k)$$

となる．

後半の主張を証明しよう．$T \geq S$ となる有界な $(\mathcal{F}_n)$-停止時刻 T, S を考える．$T \leq N$ としておく．示すべき式は任意の $A \in \mathcal{F}_S$ に対して

$$\int_A X(T,\omega) P(d\omega) = \int_A X(S,\omega) P(d\omega) \tag{2.4}$$

という式である．左辺を S の値で分解して

$$\sum_{j=0}^{N} \int_{A \cap \{S=j\}} X(T(\omega),\omega) P(d\omega).$$

$A \cap \{S = j\} \in \mathcal{F}_j$ だから、前半で示したように

$$\int_{A\cap\{S=j\}} X(T(\omega),\omega) P(d\omega) = \int_{A\cap\{S=j\}} X(T(\omega) \wedge j,\omega) P(d\omega)$$

$S \leq T$ なので $S = j$ のとき $T \wedge j = j = S$ となり，右辺は

$$\int_{A\cap\{S=j\}} X(S(\omega),\omega) P(d\omega)$$

に等しい．これは (2.4) が正しいことを言っている．

2.2.1　Doob-Meyer の分解定理

定義 2.4 フィルトレーション $(\mathcal{F}_n)$ が与えられているとき，可積分な確率変数列 $\{X(n)\}_{n\geq 0}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-**劣マルチンゲール**であるとは，任意の $n \geq 0$ に対して

$$E(X(n+1) \mid \mathcal{F}_n) \geq X(n) \qquad a.s.$$

を満たすときに言う．また，$\{-X(n)\}_{n\geq 0}$ が $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲールであるとき，上の不等式は逆向きになるが，このとき $\{X(n)\}_{n\geq 0}$ は $(\mathcal{F}_n)$-**優マルチンゲール**であると言う．

定理 2.7 (Doob-Meyer の分解定理)
$\{X_n\}$ が $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲールであるならば

$$X(n) = M(n) + A(n) \tag{2.5}$$

という分解が任意の $n \geq 0$ で成り立つ．ここに $\{M(n)\}$ は $(\mathcal{F}_n)$-マルチンゲールであり，$\{A(n)\}$ は $A(0) = 0$ を満たす単調非減少な確率過程で，任意の $n \geq 1$ に対して $A(n)$ は $\mathcal{F}_{n-1}$-可測である．これを $\{A(n)\}$ は $(\mathcal{F}_n)$-**可予測** と言う．この分解は一意的である．

この定理により，劣マルチンゲールも本質的にはマルチンゲールと扱いはそんなに変わらないことが分かる．

Doob-Meyer の分解定理の証明　アイデアはマルチンゲール $M(n)$ を無理やり作ってしまうというものである．

$$M(n) = X(0) + \sum_{j=1}^{n} (X(j) - E(X(j) \mid \mathcal{F}_{j-1}))$$

と置く．$M(n)$ は $\mathcal{F}_n$-可測であり，

$$M(n+1) = M(n) + X(n+1) - E\big(X(n+1) \mid \mathcal{F}_n\big)$$

とかけるので，

$$E(M(n+1) \mid \mathcal{F}_n) = M(n).$$

よって $\{M(n)\}$ は $(\mathcal{F}_n)$-マルチンゲール．

$$X(n) - M(n) = \sum_{j=1}^{n} (E(X(j) \mid \mathcal{F}_{j-1}) - X(j-1))$$

となる．右辺を $A(n)$ と書くと，$A(n)$ は $\mathcal{F}_{n-1}$-可測である．さらに，$A(0)=0$ で，X_n が劣マルチンゲールなので，

$$A(n)-A(n-1)=E(X(n)\mid\mathcal{F}_{n-1})-X(n-1)\geq 0$$

となり，$A(n)$ は単調非減少.

最後に，分解 $X(n)=M(n)+A(n)$ が一意的であることを見る．

$$X(n)=M(n)+A(n)=N(n)+B(n)$$

と分解できたとする．$M(n),N(n)$ はマルチンゲール，$A(n),B(n)$ は可予測な単調非減少過程とする．このとき

$$M(n)-N(n)=B(n)-A(n)$$

から，右辺は $\mathcal{F}_{n-1}$-可測となり，マルチンゲール性から

$$M(n)-N(n)=E(M(n)-N(n)\mid\mathcal{F}_{n-1})=M(n-1)-N(n-1)$$

これを繰り返して

$$M(n)-N(n)=M(0)-N(0)=B(0)-A(0)=0$$

を得る．よって $M(n)=N(n),A(n)=B(n)$ となる．

任意抽出定理は劣 (優) マルチンゲールへの拡張を持つ．直接証明もできるが，ここでは Doob-Meyer の分解定理を使って証明しておこう．

定理 2.8 $X(n)$ が $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲールの時，任意の有界な $(\mathcal{F}_n)$-停止時刻 T,S に対して $T\geq S$ $a.s.$ のとき

$$E(X(T)\mid\mathcal{F}_S)\geq X_S \qquad a.s.$$

証明　$X(n)=M(n)+A(n)$ と分解する．$M(n)$ はマルチンゲール．$A(n)$ は単調非減少なので，$A(T)\geq A(S)$ したがって任意抽出定理により

$$E(X(T)\mid\mathcal{F}_S)\geq E(M(T)+A(S)\mid\mathcal{F}_S)=M(S)+A(S).$$