2.3 連続時間のマルチンゲール

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ が右連続性：

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \cap_{u>t}\mathcal{F}_u$$

をみたすものとする．

定義 2.5 フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)$ をもつ確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ において，確率過程 $X(t) = X(t, \omega)$, $t \geq 0$ が $(\mathcal{F}_t)$-**マルチンゲール**であるとは,

(i) $X(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-適合，詰まり，任意の $t \geq 0$ について $X(t)$ は $\mathcal{F}_t$-可測.

(ii) $E\big[|X(t)|\big] < \infty, \quad \forall t \geq 0,$

(iii) 任意の $t > s \geq 0$ に対して

$$E\big[X(t)|\mathcal{F}_s\big] = X(s) \quad P-a.s. \tag{2.6}$$

が成立する時にいう．

注意 上の条件 (iii) は次の (iii)$'$ と同値である．
(ii)$'$ 任意の $t > s \geq 0$ と任意の $B \in \mathcal{F}_s$ に対して

$$\int_B X(t, \omega)P(d\omega) = \int_B X(s, \omega)P(d\omega) \tag{2.7}$$

定義 2.6 $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ が，$(\mathcal{F}_t)$-停止時刻であるとは，任意の $t \geq 0$ に対して $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ が成り立つときに言う．$(\mathcal{F}_t)$-停止時刻 τ に対して時刻 τ までの情報の全体 $\mathcal{F}_\tau$ を

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F};\ \text{任意の } t \geq 0 \text{ に対して } A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

で定める．

注意 2.9 離散時間のときと同じ理由で $\mathcal{F}_\tau$ は σ-加法族である．

命題 2.10 τ, T を二つの $(\mathcal{F}_t)$-停止時刻とし，$\tau \leq T$, $a.s.$ とする．このとき

$$\mathcal{F}_T \supset \mathcal{F}_\tau$$

である．

この証明も離散時間のときと同様.

例 2.1 $X(t)$ を右連続な確率過程で，$(\mathcal{F}_t)$-適合，つまり任意の $t \geq 0$ に対して $X(t)$ は $\mathcal{F}_t$-可測とする．このとき、$A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ が開集合ならば

$$\tau_A = \inf\{t \geq 0; X(t) \in A\}$$

は $(\mathcal{F}_t)$-停止時刻になる．実際，A が開集合ならば右連続性から

$$\{\tau_A < t\} = \bigcup_{s<t, s:\text{有理数}} \{X(s) \in A\} \in \mathcal{F}_t$$

で，これから $\mathcal{F}_t$ の右連続性により

$$\{\tau_A \leq t\} = \bigcap_{n \geq 1} \{\tau_A < t + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$$

となり，確かに τ_A は $(\mathcal{F}_t)$-停止時刻．少し面倒だが，さらに $X(t)$ が連続な確率過程ならば A が閉集合のときも τ_A は $(\mathcal{F}_t)$-停止時刻になる．これには，U_n を A の $1/n$-近傍とする．

$$U_n = \bigcup_{x \in A} B(x, 1/n), \qquad \text{ただし}, B(x,r) = \{y \in \mathbf{R}; |x-y| < r\}$$

とする．明らかに U_n は開集合で，

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0\,;\, X(t) \in U_n\}$$

は上の事から $(\mathcal{F}_t)$-停止時刻．$\tau_n \leq \tau_{n+1} \leq \tau_A$ であることも明らかだろう．これより $\tau = \lim_{n\to\infty} \leq \tau_A$ が分かり，さらに τ は $\mathcal{F}_t$-停止時刻である．なぜなら，

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

だから．最後に $\tau_A = \tau$ を言う．これには上の事から $\tau \geq \tau_A$ を言えばよいが，$X(t)$ が連続なので，

$$X(\tau) = \lim_{n\to\infty} X(\tau_n)$$

だが，$X(\tau_n) \in \overline{U_n}$ なので， $m \geq n$ ならば $X(\tau_m) \in \overline{U_m} \subset \overline{U_n}$ となり，これより，$m \to \infty$ として，$X(\tau) \in \overline{U_n}$ が任意の n について成立．よって，

$$X(\tau) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} = A.$$

これは $\tau_A \leq \tau$ を意味している．

定理 2.11 (Doob の任意抽出定理) $X(t)$ を右連続な $\mathcal{F}_t$-劣マルチンゲールとするとき，τ_1, τ_2 がともに有界な $(\mathcal{F}_t)$-停止時刻で $\tau_1 \leq \tau_2 \quad a.s.$ であるならば,

$$E[X(\tau_2) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] \geq X(\tau_1) \quad a.s.$$

が成り立つ．

マルチンゲールのときは上の不等式は等式になる．

Brown **運動のマルチンゲール性**

後の便宜のためにフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)$ に関する Brown 運動を定義する．

定義 2.7 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ において，確率過程 $B(t)$ が，$(\mathcal{F}_t)$-Brown **運動**であるとは,

(i) 任意の $t \geq 0$ で $B(t)$ は $\mathcal{F}_t$-可測

(ii) $B(0) = 0 \quad P - a.s.$

(iii) 任意の $t > s \geq 0$ に対して， $B(t) - B(s)$ は $\mathcal{F}_s$ と独立で，平均 0，分散 $t - s$ の Gauss 分布となる．

定理 2.12 $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動 $B(t)$ は $P - a.s.$ で次を満たす．$0 \leq s < t$ とする．

(i) $E(B(t) \mid \mathcal{F}_s) = B(s)$, つまり $B(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール．

(ii) $E(B(t)^2 - t \mid \mathcal{F}_s) = B(s)^2 - s,$ 　つまり $B(t)^2 - t$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール．

(iii) $E\left[e^{B(t) - \frac{t}{2}} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{B(s) - \frac{s}{2}}$, つまり $M_t = e^{B(t) - \frac{t}{2}}$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール．

練習問題 2.3 　マルチンゲールの定義に従い，$(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動の定義を用いて定理 2.12 を証明せよ．