2.6 伊藤の公式 (Ito formula)

$B(t)$ を $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とし，次の様な確率過程を考える．

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s,\omega)ds + \int_0^t a(s,\omega)dB(s) \tag{2.12}$$

ここに， $a(t,\omega)$, $b(t,\omega)$ はともに $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測な確率過程で，任意の $T > 0$ に対して

$$\int_0^T |b(s,\omega)|ds \quad < \quad \infty \quad a.s. \tag{2.13}$$

$$\int_0^T |a(s,\omega)|^2 ds \quad < \quad \infty \quad a.s. \tag{2.14}$$

をみたすものとする．このような確率過程は**伊藤過程**ともよばれ，連続な確率過程の重要な例として知られている．

定理 2.17 $M(t)$ が連続な $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールで，$K(t)$ が $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測で，

$$M(t) = \int_0^t K(s)\,ds \quad \text{ただし} \quad \int_0^T |K(s)|\,ds < \infty \;\; a.s.,$$

ならば

$$M(t) = 0 \quad \forall t \le T, \quad a.s.$$

となる．

この定理は伊藤過程の分解 (**??**) が一意的であることを意味している．

証明 $\displaystyle\int_0^T |K(s)|ds \le N$ となる定数 N がとれるときをまず考える．このとき，$t > s$ として，

$$\begin{aligned} E\left[(M(t)-M(s))^2\right] &= E\left[M(t)^2 - 2M(t)M(s) + M(s)^2\right] \\ E\left[M(t)M(s)\right] &= E\Big[M(s)E\big[M(t) \mid \mathcal{F}_s\big]\Big] = E\left[M(s)^2\right] \end{aligned}$$

なので

$$E\left[(M(t)-M(s))^2\right] = E\left[M(t)^2 - M(s)^2\right]$$

となる．いま，$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ を区間 $[0,t]$ の分割とするとき，$M(0) = 0$ とあわせて，

$$\begin{aligned}
E\left[M(t)^2\right] &= E\left[M(t)^2 - M(0)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} E\left[M(t_{i+1})^2 - M(t_i)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E\left[(M(t_{i+1}) - M(t_i))^2\right] \\
&\leq E\left[\sup_{0\leq i\leq n-1} |M(t_{i+1}) - M(t_i)| \sum_{i=0}^{n-1} |M(t_{i+1}) - M(t_i)|\right] \\
&\leq E\left[\sup_{0\leq i\leq n-1} |M(t_{i+1}) - M(t_i)| \int_0^T |K(s)|ds\right]
\end{aligned}$$

右辺の被積分項は $2N^2$ 以下で，$\sup_{0\leq i\leq n-1} |M(t_{i+1}) - M(t_i)|$ は，$M(t)$ が $[0,t]$ 上一様連続となることから，分割の幅

$$\max_{0\leq i\leq n-1} |t_{i+1} - t_i|$$

を 0 に近づけると $a.s.\omega$ に対して 0 に収束するので有界収束定理（または Lebesgue の優収束定理）により，

$$E\left[\sup_{0\leq i\leq n-1} |M(t_{i+1}) - M(t_i)| \int_0^T |K(s)|ds\right] \to 0$$

となる．したがって $M(t) = 0,\ a.s.$ がわかる．

一般の場合は停止時刻を使った議論を行う．$N \geq 1$ に対して

$$\tau_N := \begin{cases} \min\{t \geq 0;\ \int_0^t |K(s)|ds \geq N\} & \\ \infty, & \text{上の集合が空集合のとき} \end{cases}$$

とおく．$\tau_N \to \infty$ $(N \to \infty$ である．Doob の任意抽出定理により $\tilde{M}^N(t) = M(t \wedge \tau_N)$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであり

$$\tilde{M}^N(t) = \int_0^{t\wedge\tau_N} K(s)ds = \int_0^t 1_{[0,\tau_N]}(s)K(s)ds$$

とかけて，

$$|\tilde{M}^N(t)| \leq \int_0^{\tau_N} |K(s)|ds \leq N$$

だから，上の結果が使えて $\tilde{M}^N(t) = 0\ a.s.$ がすべての t について成立．$N \to \infty$ とする事により $M(t) = 0\ a.s.$ がすべての t で成立．最後に , $M(t)$ の連続性から $M(t) = 0\ \forall t \in [0,t]\ a.s.$ が従う．

定理 2.18 (**伊藤の公式**) f が C^2 級の関数の時，(**??**) の確率過程 $X(t)$ に対して，次の式が $a.s.$ で成立する．

$$
\begin{aligned}
f(X(t)) = f(X(0)) \quad &+ \quad \int_0^t \left\{ b(s,\omega)f'(X(s)) + \frac{1}{2}a(s,\omega)^2 f''(X(s)) \right\} ds \\
&+ \quad \int a(s,\omega)f'(X(s))dB(s) \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

例 2.2 $f(x) = x^2, X(t) = B(t)$ に対して伊藤の公式を使うと、$f'(x) = 2x, f''(x) = 2$ また (**??**) において、$a(t) = 1, b(t) = 0$ なので、

$$
B(t)^2 = B(0)^2 + \int_0^t \frac{1}{2} \times 2ds + \int_0^t 2B(s)dB(s) = t + 2\int_0^t B(s)dB(s)
$$

したがって、 $B(t)^2 - t$ というマルチンゲールは実は

$$
2\int_0^t B(s)dB(s)
$$

という形をしている事がわかる。

伊藤の公式の多次元への拡張は次のようになる。証明の方法は 1 次元のときと本質的に変わりはない。

定理 2.19 $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ は $C^{1,2}$-級の関数とし，$\mathbb{R}^n$ に値をとる確率過程 $X(t)$ が

$$
X_j(t) = X_j(0) + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t a_{j,k}(s,\omega)dB_k(s) + \int_0^t b_j(s,\omega)ds
$$

を満たすものとする．ただし，$a_{j,k}(t,\omega)$, $b_j(t,\omega)$ はそれぞれ $a.s.$ で次の条件をみたすものとする．

$$
\int_0^t a_{j,k}(s,\omega)^2 ds < \infty, \quad \int_0^t |b_j(s,\omega)|ds < \infty
$$

また, $B_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, d$ は独立な Brown 運動とする．このとき,

$$
\begin{aligned}
f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X(s)) ds \\
&+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(s, X(s)) a_{j,k}(s, \omega) dB_k(s) \\
&+ \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(s, X(s)) b_j(s, \omega) ds \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^d \sum_{k=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X(s)) a_{i,k} a_{j,k} ds
\end{aligned}
$$

例 2.3 $B(t)$ を $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動として,

$$
\begin{aligned}
X(t) &= X(0) + \int_0^t a(s) dB(s) + \int_0^t b(s) ds \\
Y(t) &= Y(0) + \int_0^t \alpha(s) dB(s) + \int_0^t \beta(s) ds
\end{aligned}
$$

とする．$a, \alpha \in \mathcal{L}^2$, b, β は有界で $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測として置く．この時, $f(x, y) = xy$ に伊藤の公式を適用してみよう．定理 **??** で $d = 1, n = 2$ の場合に当たる．この時,

$$
\begin{aligned}
X(t)Y(t) = X(0)Y(0) &+ \int_0^t \big(X(s)\alpha(s) + Y(s)a(s) \big) dB(s) \\
&+ \int_0^t \big(X(s)\beta(s) + Y(s)b(s) \big) ds + \int_0^t a(s)\alpha(s) ds
\end{aligned}
$$

となる．とくに X, Y が $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールのとき，つまり，$b = \beta = 0$ のとき,

$$
X(t)Y(t) - \int_0^t a(s)\alpha(s) ds
$$

は再び $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールとなる．