線形代数 1 演習 1 解答例

練習 1.1 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ によって次の集合はどのような集合に写るか? ただし，平面の点は $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ と表し，これが $A\vec{x}$ に写されるものとする．

(1) x 軸，　(2) y 軸　(3) $y=x$　(4) 正方形 $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$

解答　移った点の位置ベクトルを $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ と書くとき，

(1) x 軸上の点を $\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}$ と書くと，

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ 3x\end{pmatrix}$$

よって $u=x, v=3x$ なので，x 軸は直線 $v=3u$ に写る．

(2) y 軸上の点を $\begin{pmatrix}0\\ y\end{pmatrix}$ と書くと，

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2y\\ y\end{pmatrix}$$

よって $u=-2y, v=y$ なので，y 軸は直線 $u=-2v$ に写る．

(3) 直線 $y=x$ 上の点は $\begin{pmatrix}t\\ t\end{pmatrix}$ とかける．

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}t\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\ 4t\end{pmatrix}$$

直線 $y=x$ は直線 $v=-4u$ に写る．

(4)

$$A\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 4\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

なので，正方形 $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ は平行四辺形 $(0,0),(1,3),(-1,4),(-2,1)$ に写る．行き先は正方形でも長方形でもありません．確かめてみましょう．

上の計算を列ベクトルをまとめて行列で計算することもできます。

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

と普通の行列計算になります.