線形代数 1 演習 10 解答例

練習 10.1 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ がベクトル空間 V の基であるとき，次のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ について問いに答えよ．

$$\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$$

(1)

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3] = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3]A$$

となる 3×3 行列 A を求めよ．

(2) $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ が 1 次独立なので，定理 9.5(教科書 p.78, 定理 4.3.6) により $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ が 1 次独立であることと A が正則行列であることが同値であるから，A を見て $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ の 1 次独立性を判定できる．上の $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は V の基になっているか?

【解答】(1)

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3] = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3]\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) A の簡約形を求める．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これより $rank(A) = 3$ で正則，したがって $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は 1 次独立で，基 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ の個数と一致しているので，V の基になっている．(V の次元は 3)