

練習 11.1 次のベクトル空間 W の次元と一組の基を求めよ

$$(1) W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\},$$

$$(2) W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$$

解 (1)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より主成分に対応しない変数に $x_3 = s, x_5 = t$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - 2t \\ 0 \\ s \\ t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．よって $\dim(W) = 2$, 基としては

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の二つを取ることができる．

(2)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & -7 & 10 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -4 & -7 & 1 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & -10 & 25 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \end{aligned}$$

より, 主成分に対応しない $x_4 = s, x_5 = t$ と置くと,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t \\ -5s + 7t \\ 3s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり, $\dim(W) = 2$, W の基としては

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を取ることができる.