線形代数 1 演習 12 解答例

練習 12.1 (1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}$$

が（ $\mathbb{R}^3$ の標準内積で）直交するように a を求めよ.
(2) (1) で求めた a の値に対して，二つのベクトルが 1 次独立な事を示せ.

解　(1) 二つのベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と置くと，標準内積は

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 3 - 2a - a = 3 - 3a = 0.\text{よって } a = 1 \text{ となる.}$$

(2) $\boldsymbol{a}$ と $Vecb$ は $\mathbf{0}$ でなく直交している.

$$c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$$

とする．両辺と $\boldsymbol{a}$ の内積を取ると

$$c_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 0 = 0$$

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 3$ だからこれより $c_1 = 0$. 同様に，最初の式と $Vecb$ の内積をとると

$$c_2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) + 0 = 0$$

$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 9 + 4 + 1 = 14$ だから，これから $c_2 = 0$. したがって $c_1 = c_2 = 0$ となり， $Veca, \boldsymbol{b}$ は 1 次独立.
　もちろん今までの様に簡約形を求めて

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり， $\mathrm{rank}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = 2$ なので，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は 1 次独立としても良い.
　また，実際に $c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ を c_1, c_2 に関する連立方程式 (斉次方程式）としてといて， $c_1 = c_2 = 0$ をだし，1 次独立と言っても良い.