練習 13.1 次の $\mathbb{R}^3$ の基をシュミットの方法で正規直交化せよ．

$$(1)\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}:\quad (2)\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{w}_3=\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$$

解　(1)　最初に $\boldsymbol{v}_1$ を正規化する．$\|\ \boldsymbol{v}_1\ \|^2=1+1+1=3$ だから，$\|\ \boldsymbol{v}_1\ \|=\sqrt{3}$.

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

とおく．次に

$$\boldsymbol{v}_2'=\boldsymbol{v}_2-(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$$

を計算 $(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{u}_1)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ だから，

$$\boldsymbol{v}_2'=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\quad\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

よって $\|\boldsymbol{v}_2'\|=\sqrt{\frac{4}{9}\times 6}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ となる．

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_2'=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

同様

$$\boldsymbol{v}_3'=\boldsymbol{v}_3-(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1-(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$$

を計算する．

$$(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{u}_1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1-1-1)=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ (\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{u}_2)=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1-2+1)=-\frac{2}{\sqrt{6}}$$

となるので，

$$\boldsymbol{v}_3'=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

よって

$$\boldsymbol{u}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

となる.

(2) $\|\boldsymbol{w}_1\| = \sqrt{10}$ だから

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{u}_1) = \frac{8}{\sqrt{10}}$ より

$$\boldsymbol{w}_2' = \boldsymbol{w}_2 - (\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となり, $\|\boldsymbol{w}_2'\| = \frac{\sqrt{190}}{5}$ だから

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{190}} \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$(\boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{u}_1) = \frac{7}{\sqrt{10}},\ (\boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{u}_2) = -\frac{43}{\sqrt{190}}$$

だから,

$$\boldsymbol{w}_3' = (\boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 = -\frac{8}{19} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を得るので,

$$\|\boldsymbol{w}_3'\| = \frac{8}{\sqrt{19}}$$

となり, 正規化して

$$\boldsymbol{u}_3 = -\frac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$