線形代数 1 演習 14 解答例

練習 14.1 次の $\mathbb{R}_3$ の部分空間 W について W の直交補空間 $W^\perp$ を求めよ．

(i) $W = \{(a, a, 0)\,;\, a \in \mathbb{R}\}$.

(ii) $W = \{(a, 2b, a+b)\,; a, b \in \mathbb{R}\}$.

解 (i) W は 1 次元で $\boldsymbol{v} = (1, 1, 0)$ は W の基である．よって

$$W^\perp = \{\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}_3\,;\, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = 0\}$$

と書ける．$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = 0$ は方程式

$$x + y = 0$$

を意味するので，

$$(x, y, z)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$$

と表すことにより，主成分に対応するのは x で， $y = s, z = t$ と書くと

$$(x, y, z) = (-s, s, t) = s(-1, 1, 0) + t(0, 0, 1)$$

となる．よって

$$W^\perp = \{s(-1, 1, 0) + t(0, 0, 1); s, t \in \mathbb{R}\}.$$

(ii) W の元は

$$(a, 2b, a+b) = a(1, 0, 1) + b(0, 2, 1)$$

と書けるので，$(1, 0, 1)$ と $(0, 2, 1)$ を W の基としてとれる．このふたつが 1 次独立な事は

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1/2\end{pmatrix}$$

と二つ並べた行列のランクが 2 であることからわかる．したがって

$$W^\perp = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}_3\,;\, \left\{\begin{array}{lcl} x + z & = & 0\\ 2y + z & = & 0\end{array}\right.\right\}$$

この連立方程式を解くために簡約形を求める．

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1/2\end{pmatrix}$$

だったので，主成分以外に対応している z を $z = t$ と置くと

$$(x, y, z) = (-t, -2t, t) = t(-1, -2, 1)$$

が解として得られる．よって

$$W^\perp = \{t(-1, -2, 1)\,;\, t \in \mathbb{R}\}.$$