

線形代数 1 演習 4 解答例

練習 4.1 次の行列を簡約化せよ．またそれぞれの行列の階数（ランク）を求めよ

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

主成分を含む列ベクトルは二つあるので，この行列の階数は 2 である．

(2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

主成分を含む列ベクトルは二つあるので，この行列の階数は 2 である．

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

主成分を含む列ベクトルは 3 つあるので，この行列の階数は 3 である．