線形代数 1 演習 5 解答例

練習 5.1 次の連立 1 次方程式を解け.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

解 (1)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & : & -1 \\ 0 & 2 & 2 & : & 6 \\ 1 & 0 & 3 & : & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 3 \\ 2 & -1 & 5 & : & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & -1 & : & -3 \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

これより，$x_1 + 3x_3 = 1, x_2 + x_3 = 3$ となるので，$x_3 = t$ とかいて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と解を表すことができる.

(2) 係数行列の簡約形を求める.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより，$x_1+6x_3=0$，$x_2+3x_3=0$ となり，$x_3=t$ と書くと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3)　拡大係数行列の簡約形を求める．

$$\left(\begin{array}{rrrrrcr} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & : & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 & : & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 & : & -6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrrcr} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & : & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & : & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 3 & : & -3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrrrcr} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & : & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -5 & : & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & : & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrrcr} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & : & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & : & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & : & 6 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrrrcr} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & : & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & : & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrrcr} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & : & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{array}\right)$$

主成分でない列に対応する変数は x_3, x_4 だから，$x_3=t, x_4=s$ と書くことにすると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とまとめることができる．