線形代数 1 演習 7 解答例

練習 7.1 (1) 次の W_1, W_2 はベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間か？

$$W_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$$
$$W_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$$

(2) 次の W_3, W_4 はベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間か？

$$W_3 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \ ; \ f(0) = 0, f(1) = 0\}$$
$$W_4 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \ ; f''(x) - 2xf'(x) = 0\}$$

【解】　(1) W_1: 定理 7.1 の (i) $\sim$ (iii) をチェックすれば良い．(i)　$\mathbf{0}$ は各成分が 0 だから条件式

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

を満たす．よって $\mathbf{0} \in W_1$.

(ii)　$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の成分を u_1, u_2, u_3 と v_1, v_2, v_3 と書くとき，上の式が $\{u_i\}$, $\{v_i\}$ 達に対して成り立っている．これらの式は一次式なので，$\{u_i + v_i\}$ についても成り立つ．　よって $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W_1$.

(iii)　$a \in \mathbf{R}, \boldsymbol{v} \in W_1$ とする．$a\boldsymbol{v}$ の成分は av_1, av_2, av_3 だから $\boldsymbol{v}$ が満たす式を a 倍すると

$$av_1 + av_2 - av_3 = 0, \ 3av_1 + av_2 + 2av_3 = 0$$

となり，$a\boldsymbol{v} \in W_1$. よって W_1 はベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間.

W_2:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

この連立方程式を満たす実数 x_1, x_2, x_3 は $x_i = 0$ のみ．よって $W_2 = \{\mathbf{0}\}$ これは形式的には部分空間の条件を満たしている．(実は問題がミスプリで変わりました．元の問題は

$$W_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, x_1 - x_2 + 2x_3 = 1\}$$

でした．この時は

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の二つが W_2 の元で，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ の成分を w_1, w_2, w_3 と書くと，　$w_1 = -1, w_2 = 1, w_3 = 2$ となり，

$$w_1^+ w_2^2 - w_3^2 = 1 + 1 - 4 = -2 \neq 0$$

なので，$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ は W_2 の条件を満たさない．したがって，元の問題では W_2 は部分空間ではないという答えになります.）

(2)　W_3: $f_0 = \mathbf{0} = 0$ とすると，　$f_0 \in W_3$. これが零ベクトルの役割をする．$f, g \in W_3$ のとき

$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0, \quad (f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0$$

となり，$f + g \in W_3$. 実数 a に対して $af(0) = 0, af(1) = 0$ だから $af \in W_3$. よって W_3 は部分空間.

W_4: $f_0 = 0$ とする．これが零ベクトル．明らかに $f_0'' = 0, f_0' = 0$ だから $f_0 \in W_4$. 次に $f, g \in W_4$ のとき

$$\begin{cases} f''(x) - 2xf'(x) &= 0 \\ g''(x) - 2xg'(x) &= 0 \end{cases}$$

なので，和を取って $(f+g)''(x)-2x(f+g)'(x)=0$ となり $f+g\in W_4$. 最後に，実数 a と $f\in W_4$ に対して

$$(af)''(x)-2x(af)'(x)=af''(x)-2axf'(x)=a(f''(x)-2xf'(x))=0$$

なので，$af\in W_4$, したがって W_4 は部分空間.