

練習 8.1 次のベクトルは 1 次独立か 1 次従属か調べよ。(教科書 p.74, 問題 4.2,(1),(3))

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

【解】 (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくとき, この 3 つのベクトルが 1 次独立であるか否かは c_1, c_2, c_3 についての方程式

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ という自明な解しか持たないか否かで分かれる. これは $\text{rank}(A) = 3$ かどうかで分かれる. A の簡約形を求めると,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり, $\text{rank}(A) = 3$. したがって方程式は自明な解しか持たず, 与えられた 3 つのベクトルは 1 次独立.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とおいて, 与えられた 4 つのベクトルが 1 次独立になるためには斉次方程式

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

が $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ 以外に解を持たないことと同値だが, これには $\text{rank}(A) = 4$ でないといけない. しかし A は 3×4 行列なので $\text{rank}(A) \leq 3$ であり, 上の方程式は自動的に自明でない解を持つ. したがって与えられた 4 つのベクトルは 1 次従属である. 念のため A の簡約形を求めておく

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & -3 & -12 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -24 & 16 \\ 1 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 1 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

よって $3c_1 = c_4, c_2 = -2c_4, 3c_3 = 2c_4$ のとき方程式 (1) は自明でない解 c_1, c_2, c_3, c_4 を持ち, 与えられた 4 つのベクトルは 1 次従属である.