平成 17 年度第 3 年次編入学試験問題

神戸大学理学部数学科
平成 16 年 7 月 3 日
時間: 10:00–12:00

1. 次の計算問題を解きなさい.

1. 次の行列式を因数分解しなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

2. 次の連立一次方程式の解を全部もとめよ. 解全体を解空間とよぶ. この解空間の次元はいくつか?

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. 次の計算をしなさい.

1. $\sin^{-1} x$ を $\sin$ の逆関数とするとき

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)^2$$

2.

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx \quad (m, n \in \mathbf{Z})$$

3.

$$\int\int_{x,y\geq 0, x+y\leq 1} xy\, dxdy$$

4.

$$\int\int_V e^{-x^2-y^2} dxdy$$

ここで V は第一象限 $V = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ を表す.

3.

1. a, b を定数とする. y を未知関数とする微分方程式

$$y'' - (a+b)y' + aby = 0$$

の一般解を求めよ.

2. 微分方程式 $y' = y^2$ の一般解を求めよ. 解のグラフの概形を書きなさい.

4. a, b, c, d を $ad - bc = 1$, $0 < |c| < 1$ をみたす実数とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える. 次の漸化式で定義される行列の列を考える.

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_1 = A, \\ A_{n+1} &= A_n A_0 A_n^{-1} \quad (n = 1, 2, \ldots), \end{aligned}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

とおく. $M = \frac{1}{1-|c|}$ とおいて, 以下 $|a| < M$ を仮定する.

1. $a_n d_n - b_n c_n = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が成り立つことを示せ.
2. c_n を計算しなさい.
3. $|a_n| < M$ を証明せよ.

5. a, b を $a \geq b > 0$ をみたす実数とする. $a_0 = a$, $b_0 = b$ より出発して, 漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \ b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$$

で数列 a_n, b_n を定める.

1. $a_n \geq b_n$ を示せ (相加平均 $\geq$ 相乗平均 を示せ).
2. a_n は単調減少, b_n は単調増加であることを証明せよ.