平成１８年度第３年次編入学試験問題：数学

神戸大学理学部数学科
平成１７年７月２日
時間：10:00—12:00

1.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を行列式が 1 の行列とする: $ad - bc = 1$. A のトレース $a + d$ を t とする: $t = a + d$. このとき

$$A^2 = f(t)A + g(t)I$$

を満たす関数 $f(t)$, $g(t)$ を求めよ．ここで I は単位行列を表す．ただし $A \neq \pm I$ と仮定しておく．

さらに, $t = 0$ または $t = \sqrt{2}$ のとき, それぞれ $A^4 = I$ または $A^4 = -I$ となることを示せ.

2. 関数 $g_{a,b,c,d}(t)$ を

$$g_{a,b,c,d}(t) = \frac{at + b}{ct + d}$$

で定義する．ここで a, b, c, d は $ad - bc \neq 0$ を満たす任意の実定数. このとき $g = g_{a,b,c,d}(t)$ は

$$(*) \qquad \left(\frac{g''}{g'}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2$$

を満たすことを示せ．ここで $' = d/dt$. さらに任意の $a, b, c, d, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ $(ad - bc \neq 0, \hat{a}\hat{d} - \hat{b}\hat{c} \neq 0)$ に対して

$$g = g_{a,b,c,d}(g_{\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}}(t)) = g_{a,b,c,d} \circ g_{\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}}(t)$$

も $(*)$ を満たす理由を説明せよ．

3. (1) 次の重積分を求めよ．

$$\int_{0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}} x^2 y dx dy.$$

(2) $r : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^+$ を連続微分可能な関数とし, (x, y) - 平面上の曲線 $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$, $a \leq \theta \leq b$ を α とする．ここで $0 \leq a < b \leq \pi/2$. 曲線 α 上の各点と原点を結ぶ線分から出来る扇形領域の面積を $\mathcal{A}$, α の長さを $\mathcal{L}$ とするとき

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(r)d\theta, \qquad \mathcal{L} = \int_a^b g(r, r')d\theta$$

となる $f(r)$ と $g(r, r')$ を与えよ．さらに $r(\theta) = 1/\cos\theta$ の場合の $\mathcal{A}$ または $\mathcal{L}$ の上記公式を用いて

$$\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \sqrt{3}$$

を説明せよ．

4. (1) 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ を計算せよ. $\sin^{-1}$ は sin の逆関数.

$$\text{(i)}\quad f(x,y)=e^{3x}\cos 2y, \qquad \text{(ii)}\quad \sin^{-1}\frac{x}{y}.$$

(2) 関数 $f(y_1,y_2)$ が 2 階連続微分可能であるとき、$f(ax_{11}+bx_{12}, ax_{21}+bx_{22})$ (a,b は定数) について

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{22}\partial x_{11}}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_{21}\partial x_{12}}$$

を計算せよ.

5. 次の 2 次対称行列

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$$

を直交行列 P を用いて対角化せよ.