平成 19 年度第 3 年次編入学試験問題：数学

神戸大学理学部数学科
平成 18 年 7 月 1 日
時間：10:00 – 12:00

1. ベクトル空間において, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立であるとする. 次の各問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ とするとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立であるか, 1 次従属であるか, 理由をつけて述べよ.

(2) $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ とするとき, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ が 1 次独立であるか, 1 次従属であるか, 理由をつけて述べよ.

2. 次の行列式を一次式の積に分解せよ.

$$\begin{vmatrix} a^2 & (b+c)^2 & 1 \\ b^2 & (c+a)^2 & 1 \\ c^2 & (a+b)^2 & 1 \end{vmatrix}$$

3. xy 平面において, 次の関数のうち, どれが最大値をもち, どれが最小値をもつか. 理由をつけて示せ.

(1) e^{x-y}　　(2) $e^{x^2+y^4}$　　(3) $(x+y)e^{-x^2-y^2}$

4. 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dy\,dx \quad (D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\})$

(2) $\displaystyle\iint_D (|x|+|y|)\,dy\,dx \quad (D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x|+|y| \le 1\})$

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx \quad (D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\})$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dy\,dx \quad (D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \ge x, 1 \le x^2+y^2 \le 2\})$

5. $f(x)$ をすべての $x \ge 1$ に対して定義された単調増加な連続関数とする. $f(x) > 0$ であるとするとき, 次の各問に答えよ.

(1) $\displaystyle f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1) \le \int_1^n f(x)\,dx \le f(2)+\cdots+f(n-1)+f(n)$ を示せ.

(2) $\displaystyle F(x) = \int_1^x f(t)dt$ とする. また, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{F(n)} = 0$ を仮定する. そのとき,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{F(n)} = 1$$

を示せ.

6. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' - y = 0$　　(2) $y'' + y = 0$

7. 次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ について次の問に答えよ.

$$a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n}$$

(0) $a_1 = 2$ または $a_1 = 4$ のとき, $a_n = a_1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ を確認せよ.

(1) $a_1 < 2$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ を示せ.

(2) $a_1 > 4$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を示せ.

(3) $4 > a_1 > 2$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ を示せ.