平成 20 年度第 3 年次編入学試験問題：数学

神戸大学理学部数学科

平成 19 年 7 月 7 日

時間：10:00–12:00

1. (1) 3 次の正方行列 A について, $\mathrm{rank}(A) = 1$ ならば, ある 3 次元列ベクトル $\boldsymbol{a}$ と 3 つの実数 x_1, x_2, x_3 が存在して, $A = (x_1\boldsymbol{a}\ x_2\boldsymbol{a}\ x_3\boldsymbol{a})$ と書けることを示せ.

   (2) 3 次の正方行列 A, B が $\mathrm{rank}(A) \leq 1$, $\mathrm{rank}(B) \leq 1$ を満たすならば, $A + B$ は正則でないことを示せ.

2. (1) $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$ の行列式を因数分解せよ.

   (2) n 次の正方行列 A が ${}^tA = -A$ を満たしているとする. ただし, ${}^tA$ は A の転置行列である. このとき, n が奇数ならば, A の行列式は 0 であることを示せ.

3. $0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して, $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

   (1) 自然数 n に対して A^n を求めよ.

   (2) 自然数 n に対して $S_n = E + A + A^2 + \cdots + A^n$ とおく. ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である. このとき, $\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在し, $(E - A)^{-1}$ に等しいことを示せ.

4. 次を計算せよ.

   (1) $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}} \qquad \left(D = \left\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}\right)$

   (2) $\displaystyle\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tan^{-1}\frac{y}{x}$

5. 次の微分方程式を解け.

   (1) $\displaystyle\frac{dy}{dx} - y = e^{mx} \qquad (m \in \boldsymbol{R})$

   (2) $\displaystyle\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$

6. 自然数 n に対して, $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log(n+1)$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

   (1) $\dfrac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \dfrac{1}{n}$ を示せ.

   (2) $a_n \leq 1$ を示せ.

   (3) 数列 $\{a_n\}$ が単調増加であることを示せ.