平成 21 年度第 3 年次編入学試験問題：数学

神戸大学理学部数学科
平成 20 年 7 月 5 日
時間：10:00–12:00

1. 次の各問いに答えよ.

(1) 行列式 $\det\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 次を満たす $\mathbb{R}^4$ のベクトル v を 1 つあげよ:

$v \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ であり，v は 3 つのベクトル $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ のいずれとも直交する.

2. $I = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の各問いに答えよ.

(1) $n = 1, 2, \ldots$ に対し，A^n を求めよ (答えのみでよい).

(2) $S_n = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^k A^k}{k!}$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

3. $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0,1,\ldots}$ を次式によって帰納的に定義する:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1, \\ f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x t f_n(t)dt, \quad n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

このとき，$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{2^k k!}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ となることを数学的帰納法によって示せ.

4. 次の微分方程式の一般解を求めよ．但し，y', y'' はそれぞれ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

(1) $y'' - y' - 2y = 0$.

(2) $y'' - y' - 2y = \cos x$.

5. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で定義された関数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ について，次を計算せよ.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

6. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおく．次の重積分の値を求めよ.

(1) $\iint_D |x| dxdy$.

(2) $\iint_D |x+y| dxdy$.