平成 22 年度第 3 年次編入学試験問題: 数学

神戸大学理学部数学科
平成 21 年 7 月 4 日
10:00–12:00

1.
実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について次の問にこたえよ.
(1) A の固有値を求めよ.
(2) 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.
(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ. なお ${}^tPP = E$ (単位行列) をみたす実正方行列を直交行列という.

2.
(1) $(x+y)^{xy}$ の x についての偏微分を計算しなさい $(x, y > 0)$. ただし $x^a = e^{a \log x}$ と定義する.
(2)

$$D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; y \leq 3x, y \leq \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, y \geq \frac{1}{2}x, y \geq 3x - 10 \right\}$$

とするとき, D を図示し, 積分 $\int\int_D (x - 2y)\,dxdy$ を計算せよ.

3. x_1, x_2, x_3 を未知変数とする連立方程式 (A)

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j + a_{i4} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

を考える. ここで $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
(1) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ の時, この連立方程式 (A) の解をすべて求めよ.
(2) $a_{i1} = 1$, $a_{i2} = (-1)^i$, $a_{i3} = u^{i-1}$ $(1 \leq i \leq 4)$ および $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 1$, $a_{44} = u$ の時, この連立方程式 (A) が解をもつような実数 u の値をすべて決定せよ.
(3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

の時, 連立方程式 (A) が解をもつ必要十分条件を a_{ij} を用いて表せ.

4. $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le 2}$, $a_{ij}\in\mathbb{R}$ を 2 次対称行列とする．A が正定値であり固有値が λ_1,λ_2 であるとする．このとき

$$\int_{\mathbb{R}^2}\exp\left(-\sum_{1\le i,j\le 2}a_{ij}x_ix_j\right)dx_1dx_2=\frac{\pi}{\sqrt{\det A}}\qquad (B)$$

が成り立つことを証明したい．

(1) 次の積分 (a), (b) の値をそれぞれ計算せよ．

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}\exp(-x_1^2-x_2^2)dx_1dx_2$,　(b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}\exp(-\lambda_1x_1^2-\lambda_2x_2^2)dx_1dx_2$

(2)

$${}^tPAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\qquad \det P=1$$

となる直交行列 P をとる．このとき $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ なる変数変換のヤコビアンを計算して，$dx_1dx_2=dy_1dy_2$ となることを示せ．

(3) 上の問題 (1), (2) を利用して，求める式 (B) を証明せよ．

5. 次の線形常微分方程式を考える．

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}-3y=0, & t\in\mathbb{R}\\[2mm] y(0)=\xi_1,\ \dfrac{dy}{dt}(0)=\xi_2.\end{cases}$$

このとき，解 $y(t)$ が $\displaystyle\lim_{t\to\infty}y(t)=0$ を満たすような初期値 $\xi_1,\ \xi_2\in\mathbb{R}$ の必要十分条件を求めよ．