平成 23 年度第 3 年次編入学試験問題：数学

神戸大学理学部数学科
平成 22 年 7 月 3 日
時間：10:00–12:00

1. 次の行列 X, Y の逆行列をそれぞれ求めよ．(a は複素数とし空欄の成分は 0 とする.)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & a & \\ & & 1 & a \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & a & \\ & & 1 & a \\ a & & & 1 \end{pmatrix}.$$

2. k を実数として

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

とする．$\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．

(1) f の核 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ の次元を求めよ．

(2) f の像 $W = \{f(\boldsymbol{x}) \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元を求めよ．

3. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正数からなる数列で，不等式

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成立するものとする．この時，以下の問いに答えよ．

(1) 全ての自然数 n について $a_n \leq \dfrac{a_1}{n^2}$ となることを示せ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを示せ．

4. $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x, y) = (x + \cos y)e^{-x}$ の極値を全て求め，極大・極小を判定せよ．

5. 常微分方程式

$$y'' - y = e^{-x}$$

を初期条件 $y(0) = a$, $y'(0) = b$ のもとで解け．また $x \geq 0$ で有界な解が存在するための a と b の必要十分条件を求めよ．(ここで $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である.)

6. 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 \sin\left(\pi|x-y|\right) dxdy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x+y| \leq 1,\ |x-y| \leq 1\}.$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(1 + x^2 + y^2) dxdy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$