平成 26 年度第 3 年次編入学試験問題：数学

神戸大学理学部数学科
平成 25 年 7 月 6 日
時間：10:00–12:00

注意：解答用紙は 1 問につき 1 枚とし、解答した問題番号を明示すること。

1. (1) 行列

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -6 & -20 \\ -12 & 7 & 20 \\ 12 & -6 & -19 \end{bmatrix}$$

の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; A)$ をすべて求めよ.

(2) ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が一次独立であることを示し，これらをシュミットの方法により正規直交系になおせ.

2. 正の整数 n と実数 $c, y_1, y_2, \ldots, y_n$ に対し，$D_n(c, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ を

$$D_n(c, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \det \begin{bmatrix} y_1y_1 + c & y_2y_1 & \cdots & y_ny_1 \\ y_1y_2 & y_2y_2 + c & \cdots & y_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1y_n & y_2y_n & \cdots & y_ny_n + c \end{bmatrix}$$

で定義し，また $n \geq 2$ のとき $d_n(c, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ を

$$d_n(c, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2y_1 & \cdots & y_ny_1 \\ y_2 & y_2y_2 + c & \cdots & y_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_2y_n & \cdots & y_ny_n + c \end{bmatrix}$$

で定義する．ただし, $\det A$ は行列 A の行列式をあらわす．このとき以下の問いに答えよ.

(1) $n \geq 2$ のとき次の等式が成り立つことを示せ.

$$D_n(c, y_1, y_2, \ldots, y_n) = cD_{n-1}(c, y_2, \ldots, y_n) + y_1 d_n(c, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

(2) $n \geq 2$ のとき $d_n(c, y_1, y_2, \ldots, y_n) = c^{n-1}y_1$ であることを示せ.

(3) n についての数学的帰納法により次の等式が成り立つことを示せ. (ただし $0^0 = 1$ とする.)

$$D_n(c, y_1, y_2, \ldots, y_n) = c^n + c^{n-1}\sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

3.　(1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2,\ y \geq x\}$ とするとき，積分

$$\int_D x^2 dxdy$$

の値を求めよ．

(2) $u = \log(e^x + e^y + e^z)$ のとき次の式が成り立つことを示せ．

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2e^{x+y+z-3u}$$

4. 微分方程式 $y'' - 2y' = xe^{2x}$ について以下の問いに答えよ．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) この方程式は $y = (Ax^2 + Bx)e^{2x}$（A, B は定数）の形の特殊解を持つことを示し，A, B を決めよ．

(2) この方程式の一般解を求めよ．

5. z は $|z| = 1$, $z \neq 1$ を満たす複素数とする．このとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots \qquad (*)$$

が（ある複素数に）収束することを示したい．以下の問いに答えよ．非負整数 n に対し $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$ とおく．

(1) 非負整数 n に対し $|S_n| \leq \dfrac{2}{|1-z|}$ であることを示せ．

(2) $m > n$ であるような正の整数 m, n に対し次が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=n}^{m-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{S_m}{m} - \frac{S_{n-1}}{n}$$

(3) (1), (2) を用いて，以下の条件 (C) が成り立つことを示せ．

任意の正の実数 ε に対し，正の整数 N が存在して，$m > n \geq N$ であるような任意の整数 m, n に対して $\left| \displaystyle\sum_{k=n}^{m-1} \frac{z^k}{k} \right| < \varepsilon$ が成り立つ．　(C)

（コーシーの収束条件定理によれば，条件 (C) は級数 $(*)$ の収束と同値であるため，(3) より級数 $(*)$ の収束が証明できたことになる．）