平成 28 年度第 3 年次編入学試験問題：数学

神戸大学理学部数学科

平成 27 年 7 月 4 日

時間：10:00–12:00

注意：解答用紙は 1 問につき 1 枚とし、解答した問題番号を明示すること。
解答用紙の「学籍番号」は「受験番号」と読み替えよ。

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

 (1) A の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; A)$ を全て求めよ．

 (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を 1 つ求めよ．なお，${}^tPP = E$（単位行列）を満たす実正方行列 P を直交行列という．

 (3) $n \in \mathbb{N}$ に対して，A^n のトレース $\mathrm{Tr}\, A^n$ を計算せよ．

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，$B = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} kA^{k-1}$ とする．ただし，A^0 は単位行列 E を表すものとする．このとき，次の問いに答えよ．

 (1) B を求めよ．

 (2) $(E-A)^2 B$ を計算せよ．

3. 次の問に答えよ．

 (1) $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{\cos x + \cosh y}$ に対して，$\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x,y) + \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y)$ を計算せよ．ただし，$\cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$ である．

 (2) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(2x^2+2\sqrt{2}xy+3y^2)}\,dxdy$ の値を求めよ．

4. $D_0(x) \equiv 1$，$D_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos kx \ \ (n \geq 1)$，$F_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) \ \ (n \geq 0)$ で $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{D_n\}$ と $\{F_n\}$ を定義する．このとき，次の問いに答えよ．

 (1) $D_n(x)\sin\dfrac{x}{2} = \sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x$ となることを示せ．

 (2) $F_n(x)\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2(n+1)}\{1-\cos(n+1)x\} = \dfrac{1}{n+1}\sin^2\dfrac{n+1}{2}x$ となることを示せ．

 (3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\,dy = 2\pi$ となることを示せ．

 (4) $0 < \delta < \pi$ なる δ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi} F_n(y)\,dy = 0$ となることを示せ．