平成 29 年度第 3 年次編入学試験問題：数学

神戸大学理学部数学科
平成 28 年 7 月 2 日
時間：10:00–12:00

注意：解答用紙は 1 問につき 1 枚とし、解答した問題番号を明示すること。
解答用紙の「学籍番号」は「受験番号」と読み替えよ。

1. 行列 $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ $(a, b, c \in \mathbb{C})$ に対して, 次の問に答えよ. 以下, I は 3 次の単位行列を表し, ω は 1 の 3 乗根 $\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ を表す.

   (1) Λ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

   (2) A が $A = aI + b\Lambda + c\Lambda^2$ と表されることを用いて, A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

   (3) 等式
   $$\det(A) = (a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$$
   を示せ.

2. 次の問に答えよ.

   (1) $a, b, c > 0$, $V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ とするとき，積分
   $$I = \iiint_V (x^2 + y^2)\, dxdydz$$
   の値を求めよ.

   (2) 関係式 $y = x\tan\theta$ の 定める陰関数 $\theta = \theta(x, y)$ について
   $$\triangle\theta = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$$
   を計算せよ.

3. (i, j) 成分 a_{ij} が "$i < j$ のとき $a_{ij} = 0$" を満たすとき, その行列を下三角行列といい, さらに逆行列を持つとき可逆な下三角行列という. 2 つの行列 X, Y について $Y = GX$ となる可逆な下三角行列 G が存在するとき $X \sim Y$ と表す. 次の問に答えよ.

   (1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる x を求めよ.

   (2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる x_1, x_2, x_3 を求めよ.

   (3) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる x_1, x_2, x_3 を a_{ij} たちの有理式として表せ.

4. 次の問に答えよ. ただし $'$ は x による微分を表す.

(1) 任意の微分可能な関数 $y(x)$ に対して

$$u(x)^{-1}\{u(x)y(x)\}' = y'(x) + x^2 y(x)$$

となるような関数 $u(x)$ を求めよ.

(2) $y(x)$ に対する微分方程式

$$y'(x) + x^2 y(x) = x^5$$

の一般解を求めよ.

(3) $p(x), q(x)$ を与えられた関数として, $y(x)$ の微分方程式

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

の一般解の公式を導け.

5. X, Y を集合とし, $f : X \to Y$ を写像とする. A_i, A で X の任意の部分集合を, B で Y の任意の部分集合を表すとき, 次の主張 (命題) のそれぞれについて, 正しければ証明をし, 正しくなければ反例を挙げよ.

(1)

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2),$$

(2)

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2),$$

(3)

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

ここで $f(A)$ は A の f による像を, $f^{-1}(B)$ は B の f による逆像を表す:

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}, \qquad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$