

注意：解答用紙は 1 問につき 1 枚とし、解答した問題番号を明示すること。

解答用紙の「学籍番号」は「受験番号」と読み替えること。

1. 実 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

について、次の問に答えよ。

- (1) A の固有多項式を求めよ。
- (2) A の固有値を全て求めよ。
- (3) A のそれぞれの固有値に対して、固有ベクトル空間を求めよ。
- (4) 実 3 次正方行列 B が $AB = BA$ を満たすとする。 B の (1,1) 成分, (2,2) 成分, (3,3) 成分をそれぞれ a, b, c とするとき、 B の各成分を a, b, c を用いて表せ。

2. 実 3 次元数ベクトル空間 V について、次の問に答えよ。

- (1) V の 3 個のベクトルの組み

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が V の基底であるかどうかを、理由と共に答えよ。

- (2) V の 3 個のベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が生成する V の部分ベクトル空間の次元を求めよ。

3. 次の問に答えよ。

- (1) 積分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{x^2}{1+x^2+y^2} dx dy$ の値を求めよ。

- (2) C^∞ 級関数 $F(r)$ と $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ に対して、 $f(x, y, z) = F(r)$ とおく。このとき、 $r > 0$ において $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = F_{rr} + \frac{2}{r}F_r$ が成り立つことを示せ。ただし、添字は (偏) 微分を表す。

4. $f_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$ (n は正整数) とする。以下を示せ。

- (1) $f_n(x)$ は x の n 次多項式である。
- (2) $y = f_n(x)$ は微分方程式 $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$ を満たす。
- (3) $f_n(x) = 0$ の根 $x_1, \dots, x_n$ は

$$\frac{1}{x_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{2}{x_i - x_j} = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

を満たす。