

注意：解答用紙は1問につき1枚とし、解答した問題番号を明示すること。

解答用紙の「学籍番号」は「受験番号」と読み替えること。

1. 実数 a, b に対し3次実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

を考える。このとき、次の間に答えよ。

- (1) A の固有値を求めよ。
- (2) A が相異なる3つの固有値をもつための a, b の条件を求めよ。
- (3) (2) の条件が成り立つとき、 $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ。また、そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ。

2. 実4次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ について、次の間に答えよ。

- (1) 4つのベクトルの組

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が $\mathbb{R}^4$ の基底を成すか判定せよ。

- (2) 0でない実数 a, b, c, d に対し、4つのベクトルの組

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

が生成する $\mathbb{R}^4$ の部分空間の次元を求めよ。

3. S を 2×2 実対称行列とする。このとき、次の間に答えよ。

- (1) 行列 S が正定値 (すべての固有値が正) のとき、 S の $(1, 1)$ 成分、 $(2, 2)$ 成分は0でないことを示せ。
- (2) 積分 $\int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-x_1^2 - x_2^2) dx_1 dx_2$ を極座標に変換することにより求めよ。
- (3) 積分 $\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}x^T S x\right) dx_2$ を x_1 の関数として求めよ。ただし $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ であり、 S は正定値とする。

4. 次の間に答えよ。

- (1) 微分方程式 $y' = -y - 1$, $y(0) = 0$ の解 $y(x)$ を求めよ。

- (2) 次の漸化式

$$y_{k+1} = (1-h)y_k - h \quad (k \geq 0), \quad y_0 = 0$$

で決まる数列 y_k の一般項を求めよ。ここで h は0でない定数とする。

- (3) x, n を正整数、 $h = 1/n$ とおくとき、

$$y_{xn} \rightarrow y(x), \quad n \rightarrow +\infty$$

を示せ。