

注意：解答用紙は1問につき1枚とし、解答した問題番号を明示すること。

解答用紙の「学籍番号」は「受験番号」と読み替えること。

1. (1) a を実数の定数とする. x, y の関数

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + axy + \frac{y^4}{4}$$

の停留点 ($\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点) を求め、それらが f の極大値を与える, 極小値を与える, 極値を与えないのどれであるか判定せよ.

- (2) x, y の関数 u, v を

$$\begin{aligned} u &= xy \\ v &= e^{x^2+y^2} \end{aligned}$$

で定める. x, y の関数

$$g(x, y) = \sin(uv)$$

に対して, $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ を x, y で表せ.

2. a を実数とし,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

- (1) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P が存在するための必要十分条件を, a を用いて表せ.

- (2) (1) の条件が成り立つとき, $B = P^{-1}AP$ となる直交行列 P と対角行列 B の組を一つ求めよ.

3. A を n 次実正方行列とする. 単位行列, 零行列をそれぞれ E, O で表す.

- (1) $A^m = E$ となる正整数 m が存在すれば, A は正則行列であることを示せ.

- (2) $A^m = O$ となる正整数 m が存在すれば, A は非正則行列であることを示せ.

- (3) $A^m = O$ となる正整数 m が存在するとき, $E - A$ は正則であることを示せ. またこのとき, $E - A$ の逆行列を A で表せ.

4. n を正整数とする. 積分

$$\iint_A (x+y)^2 (x-y)^n dx dy, \quad A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}$$

を求めよ.