令和 5 年度第 3 年次編入学試験問題：数学

神戸大学理学部数学科

2022 年 7 月 2 日

時間：10:00–12:00

注意：解答用紙は 1 問につき 1 枚とし, 解答した問題番号を明示すること.
解答用紙の「学籍番号」は「受験番号」と読み替えること.

1. 行列 A とベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}$ が A の固有ベクトルであることを示せ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 P を 1 つ求めよ．

(3) 上記の P に対し，$\lim_{n\to\infty} P^{-1}A^nP$ を求めよ．

(4) $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

2. 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式 $y'' + \sqrt{5}y' - y + 2 = 0$ の解 $y(x)$ を求めよ．

(2) 上記の解のうち，$x > 0$ で $y(x) > 0$ となるものをすべて求めよ．

3. x, y の 2 変数関数 $f(x, y)$ に対し，

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

と定める．$f(x, y)$ が次の関数のときに Δf を求めよ．ただし以下において，i は虚数単位である.

(1) $f(x, y)$ は $(x^2 - iy^2)(1 + i) + e^{x+iy}$ の実部.

(2) $f(x, y)$ は $\dfrac{1}{x + iy}$ の虚部.

(3) $f(x, y) = 7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7$.

(4) $f(x, y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{20} (-1)^k \binom{40}{2k} x^{40-2k}y^{2k}$.

4. 次の問に答えよ.

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x, y \geq 0\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2}dxdy$ を求めよ．

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq 0\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2} \cos(ax^2 + ay^2)dxdy$ を求めよ．ただし, a は実数である．

(3) D は $\mathbf{R}^2$ 内の有界閉領域で直線 $y = x$ について線対称であるとする．積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2 - y^2}{1 + x^4 + y^4}dxdy$ を求めよ．