

注意：解答用紙は 1 問につき 1 枚とし、解答した問題番号を明示すること。

解答用紙の「学籍番号」は「受験番号」と読み替えること。

1. 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で定める。次の問に答えよ。

(1) A の固有多項式を求めよ。

(2) A の固有値 λ は $-2 < \lambda < 2$ をみたすことを示せ。

(3) A の固有値を $2 \cos \theta$ ($0 < \theta < \pi$) の形で表示せよ。ただし、3 倍角の公式

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

は証明せずに用いてもよい。

2. n を正の整数とする。 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 D_n を

$$D_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$$

で定める。次の問に答えよ。

(1) 定積分

$$\iint_{D_2} x_1 x_2 \, dx_1 dx_2$$

を求めよ。

(2) 定積分

$$\iiint_{D_3} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i x_j \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

を求めよ。

3. 次の問に答えよ。

(1) a, b を実数とする。常微分方程式

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{du}{dx} + \frac{b}{x^2} u = 0, \quad x > 1$$

の解 u に対して

$$v(t) = u(e^t), \quad t > 0$$

と定める。このとき、 v は

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + (a-1) \frac{dv}{dt} + bv = 0, \quad t > 0$$

をみたすことを示せ。

(2) $\rho > 2$ とする. 常微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\rho+1}{x} \frac{du}{dx} + \frac{\rho-1}{x^2} u = 0, \quad x > 1$$

の一般解を求めよ.

(3) $\rho > 2, c > 0$ とする. 条件 $u(1) = c$ かつ

$$\int_1^\infty |u(x)|^2 x dx < \infty$$

をみたす (2) の常微分方程式の解を求めよ.

4. 整数 b_1, b_2, b_3 に対して行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

で定める. 次の問に答えよ.

(1) A のランクが 2 となるために b_1, b_2, b_3 がみたすべき必要十分条件を求めよ.

(2) x, y, z についての連立一次方程式

$$x + y + z = 0, \quad b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0$$

の実数解をすべて求めよ.

(3) (2) の連立一次方程式の解で各成分が整数となるものをすべて求めよ.