

注意：解答用紙は 1 問につき 1 枚とし、解答した問題番号を明示すること。

解答用紙の「学籍番号」は「受験番号」と読み替えること。

1. 実数 a, b に対し、正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

を考える。次の問に答えよ。

- (1) A が相異なる 3 つの実固有値をもつための、 a, b についての条件を求めよ。
- (2) (1) の条件が成り立つとする。このとき、 A のそれぞれの固有値と、それに対応する固有ベクトルを 1 つずつ求めよ。
- (3) (1) の条件が成り立つとする。このとき、 $P^T A P$ が対角行列となるような直交行列 P が存在するためには、 a, b がどのような条件をみたせばよいか。また、その条件が成り立つとき、そのような直交行列 P を 1 つ求めよ。ただし、 P^T は P の転置を表す。

2. a を実数とする。次のそれぞれの積分について、積分が収束するための a の条件とそのときの積分 I の値を求めよ。

$$(1) I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

$$(2) I = \int_D (1 - x - y)^a dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

3. 4 次の正方行列 A は、重複度 2 の固有値 1 と、重複度 1 の固有値 2、重複度 1 の固有値 3 をもつとする。またベクトル $(1, 0, 1, 0)^T$ は固有値 1 に対応する固有ベクトル、ベクトル $(1, 1, 0, 1)^T$ は固有値 2 に対応する固有ベクトルであるとする。このとき、次の問に答えよ。ただし、 I は単位行列、 $*^T$ は $*$ の転置を表す。

- (1) $\text{rank} A$ を求めよ。
- (2) $\dim \text{Im}(A - 2I)$ を求めよ。
- (3) $x = (0, -1, 1, -1)^T$ とする。このとき、正の整数 n に対して、 $A^n x$ を求めよ。
- (4) $x = (0, -1, 1, -1)^T$ とする。このとき、 $Ay = x$ となる y を求めよ。

4. $x > 0$ とする。未知関数 $y(x)$ に対する微分方程式

$$(*) \quad y''(x) + y'(x) + b(x)y(x) = 0,$$

は $y(x) = \frac{1}{x}$ を解に持つとする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 係数 $b(x)$ を求めよ。
- (2) 方程式 $(*)$ の解を $y(x) = u(x)\frac{1}{x}$ とおくとき、 $u(x)$ の満たす微分方程式を求めよ。
- (3) 方程式 $(*)$ の解 $y(x)$ で、 $\lim_{x \rightarrow +0} xy(x) = 1$ かつ $\lim_{x \rightarrow \infty} xy(x) = 0$ となるものを求めよ。