

注意：解答用紙は 1 問につき 1 枚とし、解答した問題番号を明示すること。

解答用紙の「学籍番号」は「受験番号」と読み替えること。

1. 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

で定める。次の問に答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A を直交行列で対角化せよ。すなわち直交行列 P と対角行列 D で $P^{-1}AP = D$ となるものを 1 組与えよ。

2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を実 2 次正方行列とし、写像 $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $f_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := A \begin{pmatrix} x \\ y^2 \end{pmatrix}$ により定める。このとき、次の問に答えよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、 f_A が線形写像であるか判定せよ。

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、 f_A が線形写像であるか判定せよ。

(3) f_A が線形写像になるような a, b, c, d の条件を求めよ。

3. 次の問に答えよ。

(1) a, b を実数とする。次の積分を計算せよ。

$$\int_D (ax^2 + by^2) dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4x\}.$$

(2) $f(x, y) = xy(24 - 3x - 4y)$ に対し $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ を満たす点を求めよ。また $f(x, y)$ の極値を求めよ。

4. 関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} & ((x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める。このとき次の問に答えよ。

(1) $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ において x, y に関して偏微分可能であることを示せ。

(2) n を正の整数とする。極限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^n)$ を求めよ。