古典的Bessel函数入門

庵原　謙治（神戸大、理、数)

概 要

ここでは、Lommel 等により調べられた Bessel 函数と呼ばれる特殊函数について、その性質を紹介し、典型的な古典的応用について述べる。

目 次

1　序章 (歴史+コメント)

Bessel 函数とよばれる函数がどのような経緯を経て考察されるようになったかを少し、述べておく。

J. Bernoulli は 1694 年に書いた曲線に関する論文の中で、所謂 Riccati 方程式と呼ばれる微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + \psi y^2 + \phi y + \chi = 0$$

(ψ, ϕ, χ は x の函数) の特別な場合を書き、その方程式は（自分には）解けない、と書いていた。その後、Leibniz に宛てた手紙の中で、Riccati 方程式が解けないことを書いているようであるが、1703 年の Leibniz 宛の手紙の中で、彼は遂に、その解を所謂 Bessel 函数の比で表すことに成功した、と書いている。

こうした動機は数学的な興味から生じているいるが、ここで、物理的な動機に目を転じてみよう。年代順に並べると、所謂 (特別な場合の)Bessel 函数は、次の論文の中に現れている。

1. 1738 年に出版された J. Bernoulli の論文の中で、重い鎖の振動について、

2. 1764 年に Novi Comm. Acad. Petrop. に出版された L. Euler の論文の中で、膜の振動について、

3. 1770 年に Hist. de l'Acad. R. des Sci. de Berlin に出版された Langange の論文の中で、所謂 Kepler 問題について、

4. 1822 年に Mém. de l'Acad. des Sci. に出版された Fourier の有名な懸賞論文 (La Théorie analytique de la chaleur) の中で、円筒形の固体の対称な熱の伝導について、

5. 1823 年に Jour. de École Polytechnique に出版された Poisson の論文の中で、円筒形の固体の非対称な熱の伝導について、

取り扱われている中に所謂 Bessel 函数が（特殊な場合ではあるが）現れている。Bessel 函数と呼ばれるようになったのは、1824 年に、Berliner Abh. に出版された Bessel の論文

Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen,
welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht.

の中で、所謂 Kepler 問題について考察し、所謂 Bessel 函数の次数が整数の場合の systematic な取扱いを初めて行ったことによる様である。

その後、特に 18 世紀に、Hankel, Lommel, Neumann, Schläfli 等により、活発に研究され [W] の様に、Bessel 函数のみで 800 ページ程ある 1 冊の本が書かれるまでに至った。

ここでは、この何とも不思議且つ魅力的な Bessel 函数についての入門を行う。

2　Γ 函数についての復習

ここでは、階乗函数 $x!$ を補間する函数として、Γ 函数を導入し、そのいくつかの性質について、調べる。ここで述べる事実以外の内容については、例えば [AAR] を見られよ。

2.1 Γ 函数の定義

$\mathbb{C}$ 上の meromorphic function であって、特に、$x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき、

$$f(x) = x!$$

となる函数 $f(x)$ が存在するか、という問題について、考察する。まず $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき、

$$\begin{aligned}
x! =& \frac{(x+n)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \\
=& \frac{n!(n+1)(n+2)\cdots(n+x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \\
=& \frac{n!n^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \cdot \frac{(n+1)(n+2)\cdot(n+x)}{n^x}
\end{aligned}$$

であるが、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+x)}{n^x} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{x} \left(1 + \frac{k}{n}\right) = 1$$

ゆえ、

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \tag{1}$$

となっている。この式の右辺は $x \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{<0}$ である限り定義されており、もちろん $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、$f(k) = k!$ を満たしている。このことは、例えば、

$$\frac{n!n^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^x \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{j}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^x$$

であることと、

$$\left(1 + \frac{x}{j}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^x = 1 + \frac{x(x-1)}{2j^2} + O\left(\frac{1}{j^3}\right)$$

から、従う。

<u>問い 2.1</u>　(1) が $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$ である限り定義されていることを証明せよ。 □

定義 2.1 $\mathbb{C}$ 上の *meromorphic function* $\Gamma(z)$ を以下で定義する：

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) :=& \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}\right) \\
=& \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}
\end{aligned} \tag{2}$$

この公式は、***Euler*** の公式と呼ばれる。

定義より、以下の等式が従う：

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{3}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}). \tag{4}$$

問い 2.2　(3), (4) を示せ。 □

ところで、定義 (2) より、$\Gamma(x)$ 自身は、$x \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ で 1 位の極をもっているが、その逆数 $\frac{1}{\Gamma(x)}$ は全平面で正則になっていることがわかる。従って、Weierstraßの定理より、無限積表示を持つはずであるが、その公式を実際に与えるのが次の定理である：

定理 2.1 (Weierstraßの公式) $x \in \mathbb{C}$ のとき、

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right\} \tag{5}$$

が成り立つ。ここで、

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$$

は、***Euler* 定数** と呼ばれる定数である。

証明　定義より、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n!n^x} \\
&= \lim_{n\to\infty} x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x\log n} \\
&= \lim_{n\to\infty} xe^{x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}-\log n\right)} \prod_{k=1}^{n} \left\{ \left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right\} \\
&= xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right\}
\end{aligned}$$

である。後は、無限積の部分が $x \in \mathbb{C}$ で収束することを示せばよい。(問い 2.3 これを示せ。) □

この公式を用いて、示しうる有用（有名？）な公式を 2 つ程紹介しておく。

まずは、**Euler の reflection formula** と呼ばれる公式である。

定理 2.2 $x \notin \mathbb{Z}$ のとき、以下の等式が成立する：

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \tag{6}$$

証明　Weierstraßの公式 (5) より、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} &= \frac{1}{(-x)\Gamma(x)\Gamma(-x)} \\
&= xe^{\gamma x} \cdot e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right\} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1-\frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}} \right\} \\
&= x \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right\} \left\{ \left(1-\frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}} \right\} \\
&= x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi x}{\pi}
\end{aligned}$$

より従う。なお、上の式変形において、2 行目から、3 行目の変形は, 各無限積が絶対かつ広義一様収束していることから正当化される。(問い 2.4 このことを示せ。) □

次に、所謂 duplication formula を述べる。

補題 2.3 $x \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\leq 0}$ とする。このとき、次の公式が成り立つ：

$$\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \sqrt{2\pi}2^{\frac{1}{2}-2x}\Gamma(2x). \tag{7}$$

証明　Weierstraßの公式 (5) より、

$$-\log\Gamma(x) = \log x + \gamma x + \sum_{k>0}\left\{\log\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right\}$$

となっているが、この右辺は、$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ で絶対かつ広義一様収束している。(問い 2.5 このことを示せ。) 従って、項別微分可能なので、

$$-\frac{d}{dx}\log\Gamma(x) = \frac{1}{x} + \gamma + \sum_{k>0}\left\{\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k}\right\}$$

となり、同様の理由で $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 上、項別微分可能で

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma(x) = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(x+k)^2}$$

を得る。ここで、$F(x) := \Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$ とおくと、$x \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\leq 0}$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\log F(x) =& \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(x+k)^2} + \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(x+\frac{1}{2}+k)^2}\\ =&4\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2x+k)^2}\\ =&\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma(2x)\end{aligned}$$

ゆえ、ある定数 A, B が存在して、

$$F(x) = AB^x\Gamma(2x)$$

と書ける。以下、A, B を決定する。まず、(3) より、$F(x+\frac{1}{2}) = \Gamma(x+\frac{1}{2})\Gamma(x+1) = xF(x)$ であるが、一方、

$$F(x+\frac{1}{2}) = AB^{x+\frac{1}{2}}\Gamma(2x+1) = 2B^{\frac{1}{2}}xF(x)$$

ゆえ、$B = 2^{-2}$ となる。よって、$F(x) = A2^{-2x}\Gamma(2x)$ となっている。ここで、

$$F(\frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1) = A2^{-\frac{1}{2}}\Gamma(1) \iff A = 2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})$$

であるが、reflection formula (6) より、$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ となり、(7) を得る。 □

一般に次の **Gauß** による公式が証明出来る：

定理 2.4 (Gauß) $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ とする。$x \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{n}\mathbb{Z}_{\leq 0}$ とするとき、次の公式が成立する：

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nx}\Gamma(nx). \tag{8}$$

問い 2.6 この公式を証明せよ。(Hint: 後で証明する、Stirling の公式を用いよ。) □

2.2　Γ 函数の漸近挙動

ここでは、よく知られている Stirling の公式の一般化について、述べる。

まず、$t=0$ の周りでの正則函数

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}$$

の Taylor 展開を用いて、以下を定義する：

定義 2.2 (Bernoulli) *1.* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、以下を満たす多項式 $B_n(x)$ を ***Bernoulli* 多項式**という：

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (about\ t=0).$$

2. *Bernoulli* 多項式の定数項 $B_n := B_n(0)$ を、***Bernoulli* 数** という。

例 2.5 *1.* $B_1 = -\frac{1}{2}$ であり、一般に $B_{2k+1} = 0$ $(k \in \mathbb{Z}_{>0})$ である。また、$B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$ 等。

2. $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ 等。

補注 2.1 実は、$k \in \mathbb{Z}_{>0}$ のとき、

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}}{(2k)!}B_{2k}\pi^{2k}$$

が成り立っている。(問い 2.7 これを示せ。)　Hint：

$$x\cot x = \sqrt{-1}x + \frac{2\sqrt{-1}x}{e^{2\sqrt{-1}x}-1}$$

であることと、$x\cot x$ の部分分数展開

$$x\cot x = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{x^2-n^2\pi^2}$$

を用いると出来る。

一般に、しかるべき滑らかさを持つ函数に対して、以下の公式が成立する。

定理 2.6 (Euler-Maclaurin) 函数 f は $\mathcal{C}^s$-級 $(s \in \mathbb{Z}_{>0})$ であるとする。このとき、次の公式が成立する：

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)dx + \sum_{l=1}^{s}(-1)^l\frac{B_l}{l!}\{f^{(l-1)}(n) - f^{(l-1)}(m)\} \\ + \frac{(-1)^{s-1}}{s!}\int_m^n B_s(x-[x])f^{(s)}(x)dx.\end{aligned} \tag{9}$$

但し、$x \in \mathbb{R}$ に対して、$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

この定理を示す前に、以下の補題を示す。

補題 2.7 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 及び、$x \in \mathbb{R}$ に対して、1-*periodic* 函数 $\tilde{B}_n(x)$ を次で定義する：

1. $\tilde{B}_1(x) := x - [x] - \frac{1}{2}$,
2. $n > 1$ のとき、$\tilde{B}_n'(x) = \tilde{B}_{n-1}(x)$ であって $\int_0^1 \tilde{B}_n(x)dx = 0$ を満たすもの。

このとき、以下の公式が成立する：

$$\tilde{B}_n(x) = \frac{1}{n!} B_n(x - [x]) \qquad \forall x.$$

補題 2.7 の証明　$\tilde{B}_0(x) := 1$ とし、

$$G(x,t) := \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_n(x) t^n$$

とおく。$0 < x < 1$ なる x に対して、

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n'(x) t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_{n-1}(x) t^n = t \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_n(x) t^n = tG$$

を満たしているので、

$$G(x,t) = A(t) e^{xt}$$

を満たす。この両辺を 0 から 1 まで、x で積分すると、条件 $\int_0^1 \tilde{B}_n(x)dx = 0$ より、

$$1 = A(t) \frac{e^t - 1}{t}$$

となるので、

$$G(x,t) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \qquad 0 < \forall x < 1$$

を得る。よって、$\tilde{B}_n$ の周期性より、補題を得る。 □

定理 2.6 の証明　s に関する帰納法で示す。$s = 1$ のとき、$m \leq j < n$ なる、$j \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(f(j) + f(j+1)) &= \int_j^{j+1} \frac{d}{dx}\left[\left(x - j - \frac{1}{2}\right) f(x)\right] dx \\ &= \int_j^{j+1} f(x)dx + \int_j^{j+1} \left(x - j - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx\end{aligned}$$

となるので、$j = m, m+1, \cdots, n-1$ として、これらの和を取ると、

$$\sum_{k=m+1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2}(f(m) + f(n)) = \int_m^n f(x)dx + \int_m^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx$$

を得る。ところで、$B_1 = -\frac{1}{2}$ であり、$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ であることに注意すると、この式は、

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) + B_1(f(n) - f(m)) = \int_m^n f(x)dx + \int_m^n B_1(x-[x])f'(x)dx$$

となり、$s=1$ の場合が従う。一般の場合には、補題 2.7 の多項式 $\tilde{B}_n(x)$ を用いて、部分積分をくり返すことにより、次の公式が示される。

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{n} f(k) = &\int_m^n f(x)dx + \sum_{l=1}^{s}(-1)^l \tilde{B}_l(0)\{f^{(l-1)}(n) - f^{(l-1)}(m)\} \\ &+ (-1)^{s-1}\int_m^n \tilde{B}_s(x) f^{(s)}(x)dx.\end{aligned}$$

再び、補題 2.7 より、定理の証明が完了する。 □

以上の準備のもとで、次の定理を証明する：

定理 2.8 $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ とする。このとき、以下の公式が成立する：

$$\begin{aligned}\log\Gamma(z) = &\left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_{2j}}{2j(2j-1)} \cdot \frac{1}{z^{2j-1}} \\ &+ \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2m}\int_0^\infty \frac{B_{2m}(x-[x])}{(x+z)^{2m}}dx.\end{aligned}$$

<u>証明</u>　(2) より、

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\prod_{l=1}^{n} \frac{l}{z+l-1}\left(\frac{l+1}{l}\right)^{x-1}$$

と書けることから、

$$\log\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\left[(z-1)\log(n+1) - \sum_{l=1}^{n}\log\frac{z+l-1}{l}\right] \tag{10}$$

を得る。但し、log の branch は, $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ で主値になるように選ぶものとする。ここで、

$$f(x) := \log\frac{x+z-1}{x} = \log(x+z-1) - \log x$$

とおくと、定理 2.6 より、

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}\log\frac{z+l-1}{l} &= \log z + \sum_{l=2}^{n}\log\frac{z+l-1}{l} \\ &= \log z + \int_1^n \{\log(x+z-1) - \log x\}dx \\ &\quad + \sum_{l=1}^{2m}(-1)^l \frac{B_l}{l!}\{f^{(l-1)}(n) - f^{(l-1)}(1)\} \\ &\quad + \frac{(-1)^{2m-1}}{(2m)!}\int_1^n B_{2m}(x-[x]) f^{(2m)}(x)dx\end{aligned}$$

となるが、例 2.5 及び、正の整数 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)![(x+z-1)^{-k}-x^{-k}]$ となることに注意すると、上の式より次の式を得る：

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}\log\frac{z+l-1}{l}=&\log z+\int_1^n\{\log(x+z-1)-\log x\}dx\\&+\sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{2j(2j-1)}\left[\frac{1}{(n+z-1)^{2j}}-\frac{1}{n^{2j-1}}-\frac{1}{z^{2j-1}}+1\right]\\&+\frac{1}{2}[\log(n+z-1)-\log n-\log z]\\&+\frac{1}{2m}\int_1^n B_{2m}(x-[x])\left[\frac{1}{(x+z-1)^{2m}}-\frac{1}{x^{2m}}\right]dx.\end{aligned}$$

この式の右辺の 1 つ目の積分を実行し、n に依存する項を調べると、

$$\begin{aligned}&(n+z-1)\log(n+z-1)-n\log n+\frac{1}{2}\log\frac{n+z-1}{n}\\&+\sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{2j(2j-1)}\left[\frac{1}{(n+z-1)^{2j}}-\frac{1}{n^{2j-1}}\right]\end{aligned}$$

となっているが、$(z-1)\log(n+1)$ からこの式をひき、$n\to\infty$ とすることによって、(10) より、以下の等式を得る：

$$\begin{aligned}\log\Gamma(x)=&\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-z+1+\sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{2j(2j-1)}\left(\frac{1}{z^{2j-1}}-1\right)\\&-\frac{1}{2m}\int_1^\infty B_{2m}(x-[x])\left[\frac{1}{(x+z-1)^{2m}}-\frac{1}{x^{2m}}\right]dx.\end{aligned}\tag{11}$$

ここで、

$$\lim_{z\to\infty}\left[\log\Gamma(z)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z+z\right]=\lim_{z\to\infty}\log\frac{\Gamma(z)}{z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}}$$

を計算する。(11) において、$m:=1$ とした式、例 2.5 及び補題 2.7 より、

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\infty}\left[\log\Gamma(z)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z+z\right]=&1-\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\int_1^\infty B_2(x-[x])\frac{1}{x^2}dx\\=&1+\frac{1}{2}\int_1^\infty B_1(x-[x])\frac{1}{x}dx\end{aligned}$$

となるので、これは、有限確定な値をもつことに注意する。このとき、(7)

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\infty}\frac{\Gamma(z)}{z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}}=\lim_{z\to\infty}\frac{\Gamma(2z)}{(2z)^{2z-\frac{1}{2}}e^{-2z}}&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\lim_{z\to\infty}\frac{2^{2z-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{(2z)^{2z-\frac{1}{2}}e^{-2z}}\\&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\lim_{z\to\infty}\frac{\Gamma(z)}{z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}}\cdot\frac{\Gamma(z+\frac{1}{2})}{(z+\frac{1}{2})^{z}e^{-z-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{(1+\frac{1}{2z})^{-z}}\\&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left\{\lim_{z\to\infty}\frac{\Gamma(z)}{z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}}\right\}^2\end{aligned}$$

ゆえ、

$$\lim_{z\to\infty}\left[\log\Gamma(z)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z+z\right]=\frac{1}{2}\log 2\pi$$

を得る。そこで、(11) において、$z\to\infty$ とすることにより、

$$1-\sum_{j=1}^{2m}\frac{B_{2j}}{2j(2j-1)}+\frac{1}{2m}\int_1^\infty\frac{B_{2m}(x-[x])}{x^{2m}}dx=\frac{1}{2}\log 2\pi$$

となり、再度この式を (11) に代入して、証明が完了する。 □

さて、定理 2.8 において、最後の項は Rex が充分大きいとき、以下の評価を持つことは簡単に示せる (問い 2.8 これを示せ。)：

$$\int_0^\infty\frac{B_{2m}(x-[x])}{(x+z)^{2m}}dx=O\left(\frac{1}{x^{2m-1}}\right)$$

従って、以下の系を得る：

系 2.9 (Stirling-de Moivre) 任意の $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して、次の公式が成立する：

$$\begin{aligned}\Gamma(z)=&(2\pi)^{\frac{1}{2}}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z+\sum_{j=1}^m\frac{B_{2j}}{2j(2j-1)}z^{-(2j-1)}+O(z^{-(2m+1)})}\\ \sim&(2\pi)^{\frac{1}{2}}(z-1)^{z-\frac{1}{2}}e^{-(z-1)+\sum_{j=1}^m\frac{B_{2j}}{2j(2j-1)}z^{-(2j-1)}+O(z^{-(2m+1)})}.\end{aligned}$$

但し、$|\arg z|=\pi-\delta$ となる、$\delta>0$ が存在するとする。特に、

$$\Gamma(z)\sim(2\pi)^{\frac{1}{2}}(z-1)^{z-\frac{1}{2}}e^{-(z-1)}$$

であり、これは、***Stirling*** の公式と呼ばれる。

上の系において、$\sim$ は、$|z|$ が充分大きいとき、その比が 1 に限り無く近くなる、という意味であることに注意しておく。

2.3 積分表示 (おまけ)

よく知られているように、通常 $s\in\mathbb{R}_{>0}$ に対して、Γ 函数 $\Gamma(s)$ は積分

$$\Gamma(s):=\int_0^\infty e^{-x}x^s\frac{dx}{x}\tag{12}$$

で定義される。もちろん、この式そのものは、Re$s>0$ なる複素数 $s\in\mathbb{C}$ に対しても、well-defined であり、この函数を解析接続して得られる函数として Γ 函数を複素領域 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0}$ 上で定義することが多い。そこで、Euler の公式 (2) による定義と、この積分による定義がどのように関連しているかまず、見ておこう。

$s\in\mathbb{R}_{>0}$ とする。このとき、$n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し、不等式

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\leq e^{-x}\qquad 0\leq x\leq n$$

が成立しているので、優収束定理より、

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} dx \tag{13}$$

と書ける。そこで、(13) の右辺の極限をとる前の値を計算してみよう。変数変換 $z = nx$ を施すと、

$$\begin{aligned}
\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} dx =& n^s \int_0^1 (1-z)^n z^{s-1} dz \\
=& n^s B(n+1, s) \\
=& n^s \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(s)}{\Gamma(n+1+s)} \\
=& \frac{n^s n!}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n)}
\end{aligned}$$

但し、ここで (3) を用いている。よって、(13) は Euler の公式 (2) そのものである。

因に、$B(p.q)$ は **Euler の Beta 函数** とよばれ、$\mathrm{Re}p > 0$ かつ $\mathrm{Re}q > 0$ のとき、

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx \tag{14}$$

で定義される函数である。念のため、思い出しておくと、これは、函数等式

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{15}$$

を満たしている。

問い 2.9 函数等式 (15) を以下の順に示せ。但し、以下では $p, q \in \mathbb{R}_{>0}$ とする。

1. 函数 $e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}$ は $(x,y) \in \mathbb{R}_{>0}^2$ 上、(どんな意味でも) 可積分であることを示せ。

2. Fubini の定理より、

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) =& \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \int_0^\infty e^{-y} y^{q-1} dy \\
=& \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1} dx dy
\end{aligned}$$

   となるが、ここで変数変換 $x = X^2,\ y = Y^2$ を施せ。

3. 更に、変数変換 $X = R\cos\theta,\ Y = R\sin\theta$ を施し、最後にもう一度変数変換 $x = \sin^2\theta,\ y = R^2$ を施すことにより、証明を完結せよ。 □

さて、積分 (12) は $e^{-x}x^{s-1}$ の $x = 0$ の近傍での振るまいにより、$\mathrm{Re}s > 0$ でしか定義されていないのであるが、Γ 函数そのものは、$s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ で定義されていたので、積分 (12) を用いて解析接続できないか、という疑問が起こる。実は、これは可能であり、以下のように行われる。

まず、$s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ を仮定する。被積分函数 $e^{-x}x^{s-1}$ は原点を除いて正則であることに注意する。 結論を先に述べると、実は、Γ 函数は、次の積分表示を持つ：

補題 2.10 $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ のとき、

$$\Gamma(s) = \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{-1}s} - 1} \int_C e^{-z} z^s \frac{dz}{z} \tag{16}$$

は (*12*) の解析接続を与える。但し、積分路 C は次の様にとる。

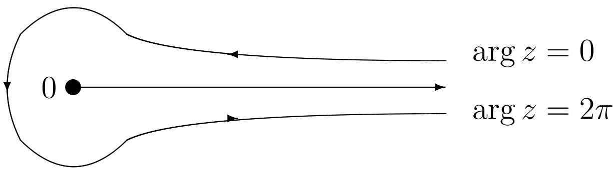
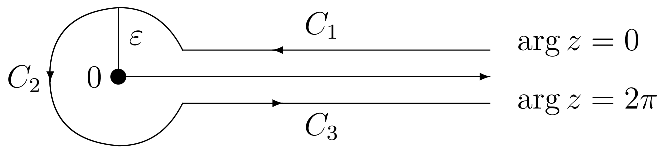


図 1: 積分路 C

この積分表示は、***Hankel* の公式**とよばれる。

証明　　$\mathrm{Re}s>0$ のとき、この積分は (12) で与えたものに一致することを示せばよい。被積分函数 $e^{-z}z^{s-1}$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上、(多価) 正則なので、Cauchy の積分定理より、積分路 C を次のように変形しても積分の値は、変わらない：



$$
\begin{aligned}
C' :=& C_1\cup C_2\cup C_3,\\
C_1 =& C_3 := (\varepsilon,\infty], \qquad C_2 := \{z\in\mathbb{C} |\ |z|=\varepsilon\},
\end{aligned}
$$

とし、その向き等は図の様に定める。但し、$\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ とする。このとき、積分

$$
\int_{C'} e^{-z}z^{s-1}dz=\int_C e^{-z}z^{s-1}dz
$$

の値を計算する。まず、

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_1} e^{-z}z^{s-1}dz=-\int_\varepsilon^\infty e^{-z}z^{s-1}dz,\\
&\int_{C_3} e^{-z}z^{s-1}dz=\int_\varepsilon^\infty e^{-z}(e^{2\pi\sqrt{-1}}z)^{s-1}dz=e^{2\pi\sqrt{-1}s}\int_\varepsilon^\infty e^{-z}z^{s-1}dz
\end{aligned}
$$

であり、変数変換 $z=\varepsilon e^{\sqrt{-1}\theta}$ を考えることにより、

$$
\int_{C_2} e^{-z}z^{s-1}dz=\sqrt{-1}\int_0^{2\pi} e^{-\varepsilon e^{\sqrt{-1}\theta}}(\varepsilon e^{\sqrt{-1}\theta})^s d\theta
$$

を得る。ここで、極限 $\varepsilon\longrightarrow 0$ をとると、$0\le\theta\le 2\pi$ のとき、$|e^{-\varepsilon e^{\sqrt{-1}\theta}}(\varepsilon e^{\sqrt{-1}\theta})^s|\le \varepsilon^{\mathrm{Re}s}e^{\varepsilon+2\pi|\mathrm{Im}s|}$ ゆえ、limit と積分の順序交換が可能になり (問い 2.10 このことを示せ)、

$$
\int_{C_2} e^{-z}z^{s-1}dz\longrightarrow 0
$$

を得る。また、

$$
\int_{C_1\cup C_3} e^{-z}z^{s-1}dz\longrightarrow (e^{2\pi\sqrt{-1}s}-1)\int_0^\infty e^{-z}z^{s-1}dz
$$

ゆえ、

$$
\int_{C'} e^{-z}z^{s-1}dz=\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{C'} e^{-z}z^{s-1}dz=(e^{2\pi\sqrt{-1}s}-1)\int_0^\infty e^{-z}z^{s-1}dz
$$

となり、示される。 □

この系として、$\Gamma(s)$ の逆数の積分表示を得る：

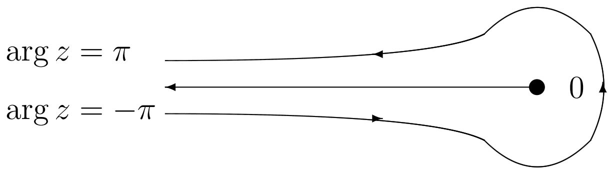


図 2: 積分路 C'

系 2.11 $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ のとき、$\frac{1}{\Gamma(s)}$ は次の積分表示を持つ：

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C'} e^z z^{-s} dz. \tag{17}$$

但し、積分路 C' は次の様にとる。この積分表示は、***Hankel* の公式**とよばれる。

<u>証明</u>　Hankel の積分表示 (補題 16) を次のように変形する：

$$\begin{aligned}\Gamma(s) =& \frac{e^{\pi\sqrt{-1}s}}{e^{2\pi\sqrt{-1}s} - 1} \int_C e^{-z} (e^{-\pi\sqrt{-1}} z)^s \frac{dz}{z} \\ =& \frac{1}{2\sqrt{-1}\sin \pi s} \int_C e^{-z} (e^{-\pi\sqrt{-1}} z)^s \frac{dz}{z}.\end{aligned}$$

ここで、reflection formula (定理 6) より、

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C e^{-z} (e^{-\pi\sqrt{-1}} z)^s \frac{dz}{z}$$

となり、変数変換 $w = e^{-\pi\sqrt{-1}} z$ を施すことにより、

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\gamma e^w w^{s-1} dw$$

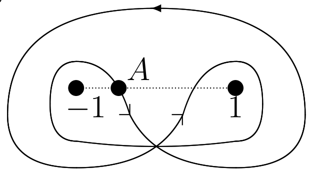
を得る。後は、$1 - s \longmapsto s$ とすればよい。 □

補注 2.2 上の証明で、変数変換 を施す時に、$w = e^{\pi\sqrt{-1}} z$ とせずに、$w = e^{-\pi\sqrt{-1}} z$ としたことに意味がある。偏角に注意せよ。

<u>問い 2.11</u>　Beta 函数 $B(p,q)$ は、$p, q \notin \mathbb{Z}$ の時、次の様に解析接続されることを示せ：

$$B(p,q) = \frac{1}{(1 - e^{2\pi\sqrt{-1}p})(1 - e^{2\pi\sqrt{-1}q})} \int_c z^{p-1} (1-z)^{q-1} dz.$$

但し、積分路 c は以下で定める。



但し、点 A において、$\arg z = \arg(1-z) = 0$ となるように、branch を選んでおく。これは、**Pochhammer の積分表示** と呼ばれる。 □

3 Bessel 函数 I: 次数が整数の場合

ここでは、$n \in \mathbb{Z}$ に対して、第 n 次の Bessel 函数 $J_n(z)$ を定義し、その諸性質を述べる。詳しくは、[W] 等を見られよ。

3.1 Bessel 函数 $J_n(z)$ $(n \in \mathbb{Z})$ の定義

$z \in \mathbb{C}$、$t \in \mathbb{C}^*$ に対して、函数

$$e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})}$$

は正則な函数で、$t = 0$ の周りで、Laurent 級数展開される。これは、$e^{\frac{1}{2}zt}$ は、t の正冪に展開され、$e^{-\frac{z}{2t}}$ は、t の負冪に展開されることによる。

定義 3.1 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、函数 $J_n(z)$ を次で定義する：

$$e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z)t^n \tag{18}$$

函数 $J_n(z)$ は、n 次の *Bessel* 函数とよばれる。

まず、簡単にわかることであるが、母函数が変換 $t \mapsto -t^{-1}$ で不変なので、(18) より、

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z)(-t^{-1})^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{-n}(z)(-t)^n \end{aligned}$$

となり、$n \in \mathbb{Z}$ のとき、

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \tag{19}$$

を得る。

ここで、$J_n(z)$ を具体的に書き下してみる。定義より、次の等式が留数定理から従う：

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_0 e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})} t^{-n-1} dt. \tag{20}$$

但し、$\oint_\zeta$ は $\zeta \in \mathbb{C}$ の周りの周回積分を表すものとする。

<u>問い 3.1</u>　(20) に変数変換 $t = e^{\sqrt{-1}\theta}$ を施すことにより、次の等式を示せ。

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sqrt{-1}(z\sin\theta - n\theta)}d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\theta - n\theta)d\theta. \tag{21}$$

<u>問い 3.2</u> cos の加法公より、

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{\cos(z\sin\theta)\cos n\theta + \sin(z\sin\theta)\sin n\theta\}d\theta$$

となるが、変数変換 $\theta \mapsto \pi - \theta$ を考察することにより、

$$J_n(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(z\sin\theta)\cos n\theta d\theta & n: \text{ even}, \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(z\sin\theta)\sin n\theta d\theta & n: \text{ odd}, \end{cases}$$

となることを示せ。更に、積分区間を $[0, \frac{\pi}{2}]$ と $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ に分けることにより、次の等式を示せ。

$$J_n(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\theta)\cos n\theta d\theta & n: \text{ even}, \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z\sin\theta)\sin n\theta d\theta & n: \text{ odd}, \end{cases} \tag{22}$$

以上は、積分表示であるが、$J_n(z)$ の級数表示を以下で計算する。まず、$e^{\frac{1}{2}zt}$ 及び $e^{-\frac{1}{2}zt^{-1}}$ を展開することにより、

$$e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^r t^r}{r!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}z\right)^m t^{-m}}{m!}$$

となっているので、$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき、右辺の t^n の係数をみてやると、

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+m}}{(n+m)!} \frac{\left(-\frac{1}{2}z\right)^m}{m!},$$

即ち、$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき、

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!}, \tag{23}$$

を得る。この表示は、そのままでは、$n \in \mathbb{Z}_{<0}$ の場合の式は与えていないが、Γ 函数を用いて書き直す、つまり、

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2m}}{m!\Gamma(n+m+1)}, \tag{24}$$

とおくことにより、$n \in \mathbb{Z}$ で成り立つ式を得る。

問い 3.3　(24) を用いて、(19) を示せ。

最後に、$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき、級数 (23) を用いて、$J_n(z)$ の order を評価しておく。$z \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\begin{aligned} |J_n(z)| &\leq \left|\frac{1}{2}z\right|^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left|\frac{1}{2}z\right|^{2m}}{m!(n+m)!} \\ &\leq \frac{\left|\frac{1}{2}z\right|^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left|\frac{1}{2}z\right|^{2m}}{m!(n+1)^m} \end{aligned}$$

より、

$$|J_n(z)| \leq \frac{\left|\frac{1}{2}z\right|^n}{n!} \exp\left(\frac{\frac{1}{4}|z|^2}{n+1}\right) \leq \frac{\left|\frac{1}{2}z\right|^n}{n!} \exp\left(\frac{1}{4}|z|^2\right) \tag{25}$$

が成立する。

3.2 母函数の応用

ここでは、$\{J_n(z)\}$ の母函数 (18) を用いて、Bessel 函数 $J_n(z)$ の満たす微分方程式や、加法公式を導く。同様の idea を用いて得られる函数等式についても言及する。

まず、以下の補題は容易に示される。

補題 3.1 $n \in \mathbb{Z}$ のとき、

$$\begin{aligned} J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) &= \frac{2n}{z} J_n(z), \\ J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) &= 2J_n'(z), \end{aligned} \tag{26}$$

が成立する。これらの式は、漸化式とよばれる。

<u>証明</u>　(18) の両辺を t 及び z で微分することにより示される。(<u>問い 3.4</u> これを示せ。)
□

(26) より、

$$\begin{aligned} zJ_n'(z) + nJ_n(z) &= zJ_{n-1}(z), \\ zJ_n'(z) - nJ_n(z) &= -zJ_{n+1}(z), \end{aligned}$$

を得るが、これは以下の式と同値である：

$$\frac{d}{dz}\{z^n J_n(z)\} = z^n J_{n-1}(z), \qquad \frac{d}{dz}\{z^{-n} J_n(z)\} = -z^{-n} J_{n+1}(z).$$

特に、2 つ目の式において、n を $n-1$ とすることにより、

$$\frac{d}{dz}\{z^n J_n(z)\} = z^n J_{n-1}(z), \qquad \frac{d}{dz}\{z^{1-n} J_{n-1}(z)\} = -z^{1-n} J_n(z),$$

を得るが、この 2 式から $J_{n-1}(z)$ を消去すると、

$$\frac{d}{dz}\left[z^{1-2n}\frac{d}{dz}\{z^n J_n(z)\}\right] = -z^{1-n} J_n(z)$$

この式を整理することにより、次の補題を得る：

補題 3.2 *n 次の Bessel 函数 $J_n(z)$ は次の微分方程式を満たす：*

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - n^2)w = 0. \tag{27}$$

ところで、微分方程式 (27) は 2 階の線形常微分方程式なので、$J_n(z)$ 以外に独立解があるはずである。この方程式は n を $-n$ に変えることにより不変なので、もう一つの独立解は $J_{-n}(z)$ と思いたいところであるが、これは (19) より、新たな解を与えない。そこで、もう一つの解がどのように書けるかは気になるところであるが、これについては、後で考察する。

次に、加法公式について述べる。指数関数の加法性より、

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)}e^{\frac{1}{2}y\left(t-\frac{1}{t}\right)} = e^{\frac{1}{2}(x+y)\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

が成り立つので、(18) より、

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}} J_r(x)t^r \sum_{m\in\mathbb{Z}} J_m(y)t^m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x+y)t^n$$

を得る。ここで、両辺の t^n の係数を比較することにより、次の公式を得る：

補題 3.3 $n\in\mathbb{Z}$ の時、次の公式が成り立つ：

$$J_n(x+y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} J_{n-m}(x)J_m(y). \tag{28}$$

この式は、加法公式とよばれる。

問い 3.5　等式 $e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}e^{\frac{1}{2}z\left(-t+\frac{1}{t}\right)} = 1$ を用いて、次の等式を示せ：

$$J_0(z)^2 + 2\sum_{r=1}^{\infty} J_r(z)^2 = 1.$$

3.3 積分表示

ここでは、Poisson が 1823 年に Jour. Éc. Polytech. に出た論文の中で与えている Bessl 函数 $J_n(z)$ の $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ のときの積分表示について考察する。

天下りではあるが、$n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、

$$J_n(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\cos(z\cos\theta)\sin^{2n}\theta d\theta \tag{29}$$

が成り立っていることを示す。これは、**Poisson の積分表示**、と呼ばれる。右辺の $\cos(z\cos\theta)$ を展開すると、

$$\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(2r)!}(z\cos\theta)^{2r}\sin^{2n}\theta d\theta$$

となるが、この場合、無限和と積分の順序交換が可能なので (問い 3.6 これを示せ)、この式の右辺は

$$\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(2r)!}z^{2r}\int_0^{\pi}\cos^{2r}\theta\sin^{2n}\theta d\theta$$

と書ける。ところで、この積分の値は

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\cos^{2r}\theta\sin^{2n}\theta d\theta =& 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2r}\theta\sin^{2n}\theta d\theta \\ =& B(r+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}) \\ =& \frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(r+n+1)}\end{aligned}$$

ゆえ、(29) の右辺は、

$$\left(\frac{1}{2}z\right)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r)!} \frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{z^{2r}}{\Gamma(r+n+1)}$$

となるが、函数等式 (3) より、

$$\frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \left(r-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(r-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2} = \frac{(2r-1)(2r-3)\cdots 1}{2^r} = \frac{(2r)!}{2^{2r}r!}$$

となるので、(29) の右辺は (24) と一致することが示された。

ところで、積分表示 (29) は次の様に書き換えられる：

$$J_n(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} e^{\sqrt{-1}z\cos\theta} \sin^{2n}\theta d\theta$$

これは、積分の部分で変数変換 $\theta \mapsto \pi - \theta$ を行い、平均を取れば示される。(問い 3.7 これを示せ。) これは、更に $t = \cos\theta$ と変数変換すると、

$$J_n(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^{1} e^{\sqrt{-1}zt}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} dt \tag{30}$$

を得る。これは、使えそうな積分表示である。

ところで、積分 (29) と積分 (22) は 次数が偶数の時、似ている表示を与えている訳であるが、この二つの公式を用いて得られる公式について、考察を行う。$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし、(22) において、$\theta \mapsto \frac{\pi}{2} - \theta$ とすると、

$$J_{2n}(z) = (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\cos\theta)\cos 2n\theta d\theta$$

となり、問い 3.2 と同様の考察により、次の等式を得る：

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos(z\cos\theta)\sin^{2n}\theta d\theta =& 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\cos\theta)\sin^{2n}\theta d\theta \\ =& 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\theta)\cos^{2n}\theta d\theta\end{aligned}$$

(問い 3.8 これを示せ。)

そこで、等式

$$\cos 2n\theta = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{4n^2\{4n^2-2^2\}\cdots\{4n^2-(2m-2)^2\}}{(2m)!} \sin^{2m}\theta$$

を用いると（問い 3.9 これを示せ)、(29) 及び上で述べた注意より、

$$J_{2n}(z) = (-1)^n \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{4n^2\{4n^2-2^2\}\cdots\{4n^2-(2m-2)^2\}}{(2m)!} \cdot \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\left(\frac{1}{2}z\right)^m} J_m(z)$$

となる。ここで、(3) 及び (6) より、

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\pi(2m)!\left(\frac{1}{2}z\right)^m} &= \frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}}{(2m)!\left(\frac{1}{2}z\right)^m} \\ &= \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{(2m)!z^m} \\ &= \frac{1}{2^m m! z^m}\end{aligned}$$

となり、Lommel が 1868 年に Math. Ann. に発表した公式

$$J_{2n}(z) = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} \quad (-1)^m \frac{4n^2\{4n^2-2^2\}\cdots\{4n^2-(2m-2)^2\}}{2^m m!} \frac{J_m(z)}{z^m}$$

を得る。

4 Bessel 函数 II: 次数が一般の場合

ここでは、一般の複素数 $\nu \in \mathbb{C}$ を次数とする Bessel 函数 $J_\nu(z)$ を定義し、その諸性質について調べる。

4.1 微分方程式による定義

微分方程式 (27) を一般の次数に拡張し、次の微分方程式の級数解について考察する：

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2-\nu^2)w = 0. \tag{31}$$

つまり、この微分方程式の解として、

$$w(z) = z^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \qquad c_0 \neq 0$$

なる形の解について考察する。まずは、収束性等は忘れて、この級数を微分方程式 (31) に代入する：

$$\begin{aligned}z^2\frac{d^2w}{dz^2} &= z^\rho \sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)(\rho+k-1)c_k z^k, \\ z\frac{dw}{dz} &= z^\rho \sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)c_k z^k, \\ (z^2-\nu^2)w &= z^\rho \sum_{k=0}^{\infty}(c_{k-2}-\nu^2 c_k)z^k,\end{aligned}$$

（但し、$c_{-1} = c_{-2} = 0$ とする）より、両辺の $z^{\rho+k}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ を比較すると、

$$\{(\rho + k)^2 - \nu^2\}c_k = -c_{k-2} \tag{32}$$

となる。ここで、仮定 $c_0 \neq 0$ より、$\rho^2 - \nu^2 = 0$ となり、$\rho = \pm\nu$ を得る。そこで、まずは $\rho = \nu$ とする。また、$\nu \in \mathbb{C}$ は一般の複素数と仮定する。このとき、(32) において、$k = 1$ とすると、$c_1 = 0$ を得る。一般に $c_{2k+1} = 0$ $(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ となる。また、k が $k = 2l \in 2\mathbb{Z}_{>0}$ を満たす時、(32) より、

$$\begin{aligned} c_{2l} &= \frac{-1}{(\nu + 2l)^2 - \nu^2} \cdots \frac{-1}{(\nu + 4)^2 - \nu^2} \frac{-1}{(\nu + 2)^2 - \nu^2} c_0 \\ &= \frac{(-1)^l}{2^{2l} l!(\nu + l) \cdots (\nu + 2)(\nu + 1)} c_0 \end{aligned}$$

となる、従って、特に

$$c_0 := \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$$

と選べば、

$$c_{2l} = \frac{(-1)^l}{2^{\nu+2l} l! \Gamma(\nu + l + 1)}$$

を得る。$\rho = -\nu$ の場合、上で得た式で $\nu \longmapsto -\nu$ とすればよい。以上より、微分方程式 (31) の解として、

$$\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{1}{2}z\right)^{2k}, \quad \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{1}{2}z\right)^{2k}$$

を得た。この級数が $\mathbb{C}^*$ で広義一様収束していることは簡単に示される。（問い 3.10 このことを示せ。）そこで、

定義 4.1 $\nu \in \mathbb{C}$ に対して、次数 ν の *Bessel* 函数 $J_\nu(z)$ を次式で定義する：

$$J_\nu(z) := \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{1}{2}z\right)^{2k}.$$

これは、$\mathbb{C}^*$ 上の多価解析函数を定める。

この表示は、次数が $n \in \mathbb{Z}$ の時の表示 (24) の拡張を与えていることに注意する。ここで、微分方程式（31）の独立解として、いつ $J_\nu(z)$ 及び $J_{-\nu}(z)$ が取れるか、という問題について考察しておく。$\nu \in \mathbb{Z}$ のときは、(19) より、この二つの函数は独立では無かったことを思い出しておこう。では、$\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の場合はどうであろうか？

そこで、Wronskian を計算しよう。これは、次で定義される行列式であった：

$$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = \begin{vmatrix} J_\nu(z) & J_{-\nu}(z) \\ J'_\nu(z) & J'_{-\nu}(z) \end{vmatrix}.$$

但し、$' = \frac{d}{dz}$ である。これは、次の様にして計算される。まず、この両辺を z で微分すると、微分方程式 (31) より、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) &= \begin{vmatrix} J'_\nu(z) & J'_{-\nu}(z) \\ J'_\nu(z) & J'_{-\nu}(z) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_\nu(z) & J_{-\nu}(z) \\ J''_\nu(z) & J''_{-\nu}(z) \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{z}W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)),\end{aligned}$$

つまり、$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z))$ は微分方程式

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{1}{z}W$$

の解である。この微分方程式の一般解から, (例えば、変数分離を用いて解くことにより、) Wronskian は

$$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = \frac{C}{z} \tag{33}$$

なる表示を持つことが示される。但し。C はある定数である。そこで、定数 C をこれから決定する。定義 4.1 より、Bessel 函数 $J_\nu(z)$ 及びその微分 $J'_\nu(z)$ は、$z = 0$ の近傍で、次の評価を持つことは明らかである：

$$\begin{aligned}J_\nu(z) &= \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + O(z^2)\right], \\ J'_\nu(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} + O(z^2)\right].\end{aligned}$$

この 2 式を Wronskian の定義式代入すると、Gamma 函数の reflection formula (6) より、

$$\begin{aligned}W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) =& z^{-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{\Gamma(-\nu)} - \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}\frac{1}{\Gamma(\nu)} + O(z^2)\right] \\ =& -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z} + O(z)\end{aligned}$$

となるが、(33) より、

$$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z} \tag{34}$$

を得る。これは、$\nu \notin \mathbb{Z}$ のとき、0 にはならないので、次の補題を得た：

補題 4.1 $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ のとき、$\{J_\nu(z), J_{-\nu}(z)\}$ は微分方程式 (*31*) の基本解系をなす。

さて、$\nu \in \mathbb{Z}$ の場合に、もう一つの独立解をどのようにして、作ればよいか考えてみよう。

定義 4.2 $\nu \in \mathbb{C}$ に対して、

$$Y_\nu(z) := \frac{\cos\nu\pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

とおく。これを、ν 次の *Neumann* 函数、または、第 2 種 *Bessel* 函数、という。

正確には、この函数は、$\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ のとき、well-defined であるが、$\nu = n \in \mathbb{Z}$ のときは、(19) より、$\frac{0}{0}$ の形になっているので、

$$Y_n(z) := \lim_{\nu \longrightarrow n} Y_\nu(z)$$

と理解する。さて、(34) より、

$$W(J_\nu(z), Y_\nu(z)) = \frac{2}{\pi z}$$

となるので、次の命題を得る。

命題 4.2 $\nu \in \mathbb{C}$ に対して、$\{J_\nu(z), Y_\nu(z)\}$ は微分方程式　*(31)* の基本解系をなす。

ここで、$\nu = n \in \mathbb{Z}$ のときの、$Y_\nu(z)$ の具体形をみておこう。簡単の為に、$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と仮定する。定義より、

$$\begin{aligned}\lim_{\nu \longrightarrow n} Y_\nu(z) &= \left[\frac{1}{\pi \cos \nu\pi}\left\{-\pi \sin \nu\pi J_\nu(z) + \cos \nu\pi \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} - \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu}\right\}\right]_{\nu=n} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n} + \frac{(-1)^n}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}\right]_{\nu=-n}\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\psi(z) := \frac{d}{dz} \log \Gamma(z)$$

とおく（ψ 函数とよばれる）。

<u>問い 3.11</u>　Weierstraßの公式 (5) を用いて、

$$\psi(z) = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right)$$

を示せ。また、$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき、

$$\psi(k+1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \gamma$$

を示せ。 □

さて、定義 4.1 より、

$$J_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{1}{2}z\right)^{2k}$$

であった。これを用いると、

$$\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} = J_\nu(z) \log \frac{z}{2} - \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi(\nu+k+1)}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{1}{2}z\right)^{2k}$$

となり、

$$\left.\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = J_n(z) \log \frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi(n+k+1)}{k!(n+k)!}\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2k},$$

及び、

$$\left.\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=-n}=J_{-n}(z)\log\frac{z}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\psi(-n+k+1)}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n+2k},$$

を得る。ここで、右辺第 2 項において、和を $\sum_{k=0}^{n-1}+\sum_{k=n}^{\infty}$ に分ける。まず、$N\in\mathbb{Z}_{>0}$ のとき、

$$\frac{\psi(-N)}{\Gamma(-N)}=-\left.\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right|_{t=-N}=(-1)^{N+1}N!$$

となっていることに注意する。これは、(3) より、

$$\frac{1}{\Gamma(t)}=\frac{t(t+1)\cdots(t+N)}{\Gamma(t+N+1)}$$

となっていることを用いれば示される。(問い 3.12 これを示せ。) よって、(19) より、

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=-n}=&(-1)^nJ_n(z)\log\frac{z}{2}-(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{1}{2}z\right)^{2k-n}\\&-(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\psi(k+1)}{k!(k+n)!}\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2k}\end{aligned}$$

となる。以上、合わせて、次の表示を得た。

補題 4.3 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき、

$$\begin{aligned}Y_n(z)=\frac{2}{\pi}J_n(z)\log\frac{z}{2}&-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\{\psi(k+1)+\psi(n+k+1)\}}{k!(n+k)!}\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2k}\\&-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1-k)!}{k!}\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n+2k}.\end{aligned}$$

問い 3.13　同様に、$\nu\in\mathbb{Z}_{<0}$ のときに、$Y_\nu(z)$ を計算することにより、$n\in\mathbb{Z}$ のとき、

$$Y_{-n}(z)=(-1)^nY_n(z) \tag{35}$$

が成り立っていることを示せ。 □

最後に、Bessel 函数の次数が特殊な値での表示を与えておく。

問い 3.14　以下の等式を示せ。

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\sin z,\qquad J_{-\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\cos z.$$

□

4.2 漸化式 & 加法公式

ここでは、前部分節で導入した、Bessel 函数の満たす漸化式や加法公式について、その証明の概略を述べる。これらは、次数が整数の場合、母函数を用いて示された公式であることに注意しておく。

まず、漸化式であるが、これについては、補題 3.1 の naïve な一般化がそのまま、成立する。

定理 4.4 $\nu \in \mathbb{C}$ に対して、次の等式が成立する：

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z),$$
$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z).$$

この証明は、次の等式を級数による定義を用いて、直接示すことにより、示される：

$$\frac{d}{dz}\{z^\nu J_\nu(z)\} = z^\nu J_{\nu-1}(z), \qquad \frac{d}{dz}\{z^{-\nu} J_\nu(z)\} = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z). \tag{36}$$

問い 3.15　これを示せ。 □

系 4.5 $\nu \in \mathbb{C}$ に対して、次の等式が成立する：

$$Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} Y_\nu(z),$$
$$Y_{\nu-1}(z) - Y_{\nu+1}(z) = 2Y'_\nu(z)$$

ここで、加法公式に移る前に、少し風変わりな（？）応用について、述べておく。定理 4.4 より、

$$\frac{J_{\nu-1}(z)}{J_\nu(z)} = \frac{2\nu}{z}\left[1 - \frac{zJ_{\nu+1}(z)}{2\nu J_\nu(z)}\right]$$

となり、この式の逆数を取ると、

$$\frac{J_\nu(z)}{J_{\nu-1}(z)} = \cfrac{\frac{z}{2\nu}}{1 - \cfrac{\frac{z}{2\nu}J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)}}$$

となる。この式の右辺の Bessel 函数の比を見ると、左辺の degree に 1 を加えたものになっていることがわかる。よって、この式を $m+1$ 回施すと、次の式を得る：

$$\frac{J_\nu(z)}{J_{\nu-1}(z)} = \frac{\frac{z}{2\nu}}{1\,-}\,\frac{\frac{z^2}{4\nu(\nu+1)}}{1\,-}\,\frac{\frac{z^2}{4(\nu+1)(\nu+2)}}{1\,-}\,\cdots \\ -\,\frac{\frac{z^2}{4(\nu+m-1)(\nu+m)}}{1\,-}\,\frac{\frac{z}{2(\nu+m)}J_{\nu+m+1}(z)}{J_{\nu+m}(z)}. \tag{37}$$

因に、この等式そのものは、次のように簡単に変形される（問い 3.16 これを示せ。）

$$\frac{J_\nu(z)}{J_{\nu-1}(z)} = \frac{1}{\frac{2\nu}{z}\,-}\,\frac{1}{\frac{2(\nu+1)}{z}\,-}\,\frac{1}{\frac{2(\nu+2)}{z}\,-}\,\cdots\,-\,\frac{1}{\frac{2(\nu+m)}{z}\,-}\,\frac{J_{\nu+m+1}(z)}{J_{\nu+m}(z)}. \tag{38}$$

こうした、‘連分数展開’は種々の場面で重要な役割を果たす。

次に、加法公式であるが、これについては、補題 28 の一般化として、次の定理を得る：

定理 4.6 $\nu \in \mathbb{C}$ の時、$|t| > |z|$ ならば、以下の等式が成立する：

$$J_\nu(t+z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{\nu-m}(t) J_m(z).$$

<u>証明</u>　$r, R, \Delta \in \mathbb{R}_{>0}$ は $r < R < \Delta$ を満たすものとする。このとき、上の式の右辺は、

$$|z| \leq r, \qquad R \leq |t| \leq \Delta$$

上、一様収束することが示される。(<u>問い 3.17</u> [W] 等を参考にして、これを示せ。）よって、右辺は、項別微分可能で、このとき、定理 4.4 より、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{\nu-m}(t) J_m(t) = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{J'_{\nu-m}(t) J_m(z) - J_{\nu-m}(t) J'_m(z)\} \\ = & \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{J_{\nu-m-1}(t) - J_{\nu-m+1}(t)\} J_m(z) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{\nu-m}(t) \{J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z)\}\end{aligned}$$

となり、和の順序交換をすることにより (<u>問い 3.18</u> これが可能であることを示せ。)、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{\nu-m}(t) J_m(t) = 0$$

が示される。従って、右辺は、$|z| < |t|$ 上の $t+z$ のみに依存する解析函数である。ここで、$z = 0$ とおくと、右辺は、(19) 及び (23) より、$J_\nu(t)$ となるので、この定理が示された。 □

4.3 積分表示

ここでは、Bessel 函数 $J_\nu(z)$ のいくつかの積分表示を与える。まず、(17) より、

$$\begin{aligned}J_\nu(z) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2n} \\ = & \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C'} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}z\right)^{2n}}{n!} e^t t^{-\nu-n-1} dt\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}z\right)^{2n}}{n!} t^{-n} \right| \leq \exp\left(\frac{|z|^2}{4|t|}\right)$$

ゆえ、和と積分の順序交換は可能である。従って、

$$\begin{aligned}J_\nu(z) = & \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu} \int_{C'} e^t t^{-\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{z^2}{4t}\right)^n dt \\ = & \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu} \int_{C'} t^{-\nu-1} \exp\left\{t - \frac{z^2}{4t}\right\} dt \end{aligned} \tag{39}$$

を得る。この積分表示式は、**Schläfli の公式** と呼ばれる。特に、この積分表示において、$|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ のとき、$t = \frac{1}{2}zu$ と変数変換すると、

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C'} u^{-\nu-1} \exp\left\{\frac{1}{2}z\left(u - \frac{1}{u}\right)\right\} du \tag{40}$$

これは、**Sonine の公式** と呼ばれる。ところで、この式は、$\nu \in \mathbb{Z}$ の時、母函数を用いて得た表示 (20) と似ている。その違いは、積分路の選び方にある。

次に、積分表示 (30) の一般化について考察する。ここでは、少し発見的考察を行う。$\nu \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\nabla_\nu := z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz} + z^2 - \nu^2$$

とおく。このとき、(30) を Hint にして、次の形の積分表示について、考察する：

$$z^\nu \int_a^b e^{\sqrt{-1}zt} T dt. \tag{41}$$

但し、T は t のみの函数であるとする。このとき、

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu \left\{ z^\nu \int_a^b e^{\sqrt{-1}zt} T dt \right\} =& z^2 \left[\nu(\nu-1) z^{\nu-2} \int_a^b e^{\sqrt{-1}zt} T dt + 2\sqrt{-1}\nu z^{\nu-1} \int_a^b t e^{\sqrt{-1}zt} T dt \right. \\
& \left. - z^\nu \int_a^b t^2 e^{\sqrt{-1}zt} T dt \right] + z \left[\nu z^{\nu-1} \int_a^b e^{\sqrt{-1}zt} T dt \right. \\
& \left. + \sqrt{-1} z^\nu \int_a^b t e^{\sqrt{-1}zt} T dt \right] + (z^2 - \nu^2) z^\nu \int_a^b e^{\sqrt{-1}zt} T dt \\
=& z^{\nu+2} \int_a^b (1-t^2) e^{\sqrt{-1}zt} T dt + (2\nu+1)\sqrt{-1} z^{\nu+1} \int_a^b t e^{\sqrt{-1}zt} T dt
\end{aligned}$$

となり、右辺の第 1 項を部分積分することにより、

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu \left\{ z^\nu \int_a^b e^{\sqrt{-1}zt} T dt \right\} =& \sqrt{-1} z^{\nu+1} \left[e^{\sqrt{-1}zt} T (t^2-1) \right]_a^b \\
& + \sqrt{-1} z^{\nu+1} \int_a^b e^{\sqrt{-1}zt} \left[(2\nu+1) T t - \frac{d}{dt}\{T(t^2-1)\} \right] dt
\end{aligned}$$

を得る。従って、積分 (41) は、次の条件を満たす時、微分方程式 (31) の解になる：

$$\frac{d}{dt}\{T(t^2-1)\} = (2\nu+1)Tt, \qquad \left[e^{\sqrt{-1}zt} T (t^2-1) \right]_a^b = 0. \tag{42}$$

最初の条件より、$T = (t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}$ と取れ、このとき、$\mathrm{Re}(\nu + \frac{1}{2}) > 0$ かつ $a = -1, b = 1$ ならば、2 つ目の条件も満たされる。そこで、この積分表示を解析接続するため、次の積分路を導入する：

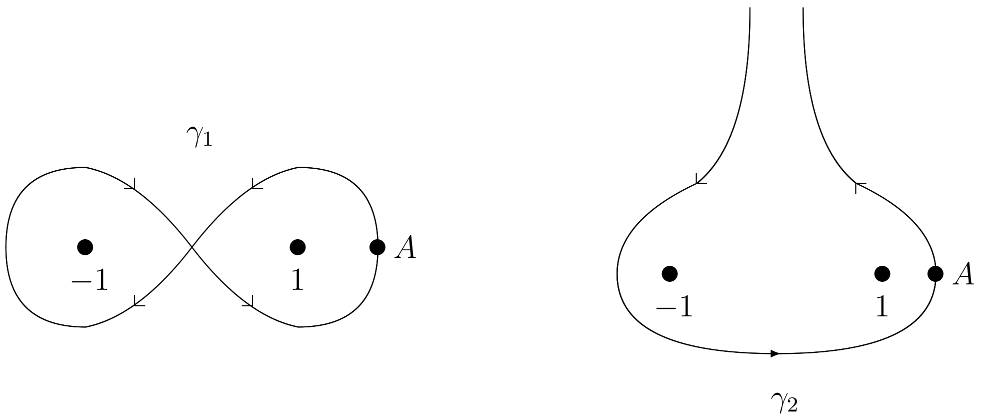


図 3: 積分路 γ_1, γ_2

但し、点 A において、$\arg(t \pm 1) = 0$ となるように、偏角を選んでおく。このとき、以下の補題が成り立つ：

補題 4.7 *Poisson* による積分表示 *(30)* は以下の様に一般化される：

1. $\nu + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}_{>0}$ のとき、

$$J_\nu(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{2\pi\sqrt{-1}\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{\gamma_1} e^{\sqrt{-1}zt}(t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt.$$

2. $\nu + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}_{>0}$ かつ $\mathrm{Re} z > 0$ のとき、

$$J_{-\nu}(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)e^{\pi\sqrt{-1}\nu}\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{2\pi\sqrt{-1}\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{\gamma_2} e^{\sqrt{-1}zt}(t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt.$$

これらは、***Hankel* の積分表示** と呼ばれる。

証明　まず、1 番目の公式を示す。積分路 γ_1 を原点に関して対称になるように、取っておく。このとき、$e^{\sqrt{-1}zt}$ の Taylor 展開

$$e^{\sqrt{-1}zt} = \sum_{m=0}^\infty \frac{(\sqrt{-1}z)^m}{m!} z^m$$

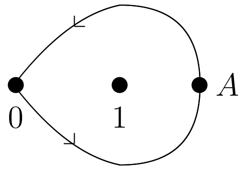
を用いると、

$$z^\nu \int_{\gamma_1} e^{\sqrt{-1}zt}(t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt = z^\nu \sum_{m=0}^\infty \frac{(\sqrt{-1}z)^m}{m!} z^m \int_{\gamma_1} t^m (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt$$

となるが、被積分函数 $t^m(t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}}$ は、m の偶奇に応じて、それぞれ偶函数、奇函数になるので、

$$z^\nu \int_{\gamma_1} e^{\sqrt{-1}zt}(t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt = 2\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m z^{\nu+2m}}{(2m)!} \int_{\gamma'} t^{2m}(t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt$$

となる。(問い 3.19 偏角等に注意して、このことをきっちりと証明せよ。) 但し、積分路 γ' は次で定義されるものである。



ここで、変数変換 $u=t^2$ を行うと、

$$z^\nu \int_{\gamma_1} e^{\sqrt{-1}zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{\nu+2m}}{(2m)!} \int_{\gamma'} u^{m-\frac{1}{2}}(u-1)^{\nu-\frac{1}{2}}du$$

となる。但し、u の偏角は、点 A において、$\arg(u-1)=0$ となるように選ぶ。(問い 3.20 このことを、justify せよ。)　さて、右辺の値を evaluate するために、$\mathrm{Re}(\nu+\frac{1}{2})>0$ と仮定する。このとき、偏角に注意すると、

$$\begin{aligned}\int_{\gamma'} u^{m-\frac{1}{2}}(u-1)^{\nu-\frac{1}{2}}du =& \{e^{-\pi\sqrt{-1}\nu} - e^{\pi\sqrt{-1}\nu}\} \int_0^1 u^{m-\frac{1}{2}}(1-u)^{\nu-\frac{1}{2}}du \\ =& 2\sqrt{-1}\cos\nu\pi \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+m+1)}\end{aligned}$$

となり (問い 3.21 これを示せ。)、解析接続の一意性より、これは全ての $\nu\in\mathbb{C}$ に対して成立する。従って、全ての $\nu\in\mathbb{C}$ に対して、

$$z^\nu \int_{\gamma_1} e^{\sqrt{-1}zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt = 2\sqrt{-1}\cos\nu\pi\Gamma(\nu+\frac{1}{2}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\Gamma(m+\frac{1}{2})}{(2m)!\Gamma(\nu+m+1)} z^{\nu+2m}$$

となるが、今、

$$\begin{aligned}\Gamma(m+\frac{1}{2}) =& (m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{2^m}\Gamma(\frac{1}{2}) \\ =& \frac{(2m)!}{2^{2m}m!}\Gamma(\frac{1}{2})\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}z^\nu \int_{\gamma_1} e^{\sqrt{-1}zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt =& 2\sqrt{-1}\cos\nu\pi\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})z^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{1}{2}z\right)^{2m} \\ =& 2^{\nu+1}\sqrt{-1}\cos\nu\pi\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})J_\nu(z)\end{aligned}$$

となる。ここで、reflection formula (6) より、$\cos\nu\pi\Gamma(\nu+\frac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}$ ゆえ、$\nu+\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}_{>0}$ のとき、結論を得る。($\nu+\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}_{>0}$ のとき、$\cos\nu\pi\Gamma(\nu+\frac{1}{2})=0$ となり、両辺をこの式で割れない。)

　次に、2 番目の公式を示す。まず、積分路 γ_2 は、$|t|>1$ を満たすようにとる。このとき、$-\frac{3}{2}\pi < \arg t < \frac{1}{2}\pi$ において、

$$(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} = t^{2\nu-1}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{m}(-t^{-2})^m$$

となるが、

$$
\begin{aligned}
(-1)^m \binom{\nu-\frac{1}{2}}{m} =&(-1)^m \frac{1}{m!}(\nu-\frac{1}{2})(\nu-\frac{3}{2})\cdots(\nu-m+\frac{1}{2}) \\
=&\frac{1}{m!}(-\frac{1}{2}-\nu+m)\cdots(\frac{3}{2}-\nu)(\frac{1}{2}-\nu) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu+m)}{m!\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}
\end{aligned}
$$

ゆえ、

$$
(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu+m)}{m!\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} t^{2\nu-1-2m}
$$

となる。これは、$|t|>1$ において、一様収束しており、

$$
z^{\nu}\int_{\gamma_2} e^{\sqrt{-1}zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}\Gamma(\frac{1}{2}-\nu+m)}{m!\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_{\gamma_2} e^{\sqrt{-1}zt}t^{2\nu-1-2m}dt
$$

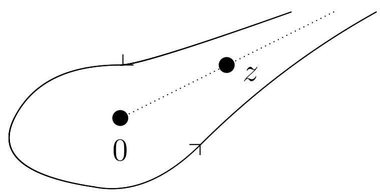
となる。(問い 3.22 この項別積分を justify せよ。) ここで、右辺の積分を計算する。変数変換 $zt = e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}}u$ を施すと、

$$
\begin{aligned}
e^{\sqrt{-1}zt}t^{2\nu-1-2m}dt =&e^{-u}(e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}}z^{-1}u)^{2\nu-1-2m}z^{-1}e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}}du \\
=&(-1)^{m+1}e^{-\pi\sqrt{-1}\nu}z^{2m-2\nu}e^{-u}(-u)^{2\nu-1-2m}du
\end{aligned}
$$

ゆえ、

$$
\int_{\gamma_2} e^{\sqrt{-1}zt}t^{2\nu-1-2m}dt = (-1)^{m+1}e^{-\pi\sqrt{-1}\nu}z^{2m-2\nu}\int_{\gamma"} e^{-u}(-u)^{2\nu-1-2m}du
$$

となる。但し、ここで、積分路 $\gamma"$ は以下に定める。



これは、essential に Hnakel の積分表示 (17) と同じものゆえ、

$$
\int_{\gamma"} e^{-u}(-u)^{2\nu-1-2m}du = -\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma(2m-2\nu+1)}
$$

となる。(問い 3.23 これを示せ。) 従って、

$$
z^{\nu}\int_{\gamma_2} e^{\sqrt{-1}zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}e^{-\pi\sqrt{-1}\nu}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\Gamma(\frac{1}{2}-\nu+m)}{m!\Gamma(2m-2\nu+1)}z^{2m-\nu}
$$

となり、duplication formula (7) より、

$$
\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu+m)}{\Gamma(2m-2\nu+1)} = \frac{2^{2\nu-2m}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(-\nu+m+1)}
$$

となり、

$$z^\nu \int_{\gamma_2} e^{\sqrt{-1}zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt = \frac{2^{\nu+1}\pi\sqrt{-1}\Gamma(\frac{1}{2})e^{-\pi\sqrt{-1}\nu}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} J_{-\nu}(z)$$

を得る。このことから、$\nu + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}_{>0}$ のとき、結論を得る。 □

さて、積分表示を用いて得られる結果の一つとして、漸近挙動について、述べておく。詳しくは、[O] 又は、[W] を見られよ。

まず、$\nu \in \mathbb{C}$ 及び $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、

$$\begin{aligned}
(\nu)_m &:= \nu(\nu+1)\cdots(\nu+m-1), \\
(\nu, m) &:= (-1)^m \frac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)_m \left(\frac{1}{2}+\nu\right)_m}{m!} = \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{m!\Gamma(\nu-m+1)},
\end{aligned}$$

とおく。このとき、次の定理は 1869 年に、Math. Ann. に出版された Hankel の論文による：

定理 4.8 $z \in \mathbb{C}$ が $|\arg z| < \pi$ を満たし、かつ $|z|$ が充分大きいとき、次の漸近展開を持つ：

$$\begin{aligned}
J_\nu(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \Bigg[&\cos(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi) \sum_{m=0}^{\lceil \frac{p-1}{2} \rceil} \frac{(-1)^m(\nu, 2m)}{(2z)^{2m}} \\
&+ \sin(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi) \sum_{m=1}^{\lceil \frac{p}{2} \rceil} \frac{(-1)^m(\nu, 2m-1)}{(2z)^{2m-1}} + O(z^{-p}) \Bigg] \quad \forall p \in \mathbb{Z}_{>0}.
\end{aligned}$$

5 Fourier-Bessel 展開

ここでは、Fourier-Bessel 展開とよばれるものについて考察する。

5.1 Bessel 函数 $J_\nu(z)$ の零点

ここでは、$J_\nu(z)$ の零点についての性質を調べ、その応用として、無限積展開について述べる。また、直交性を用いて、Bessel 函数 $J_\nu(z)$ ($\nu \in \mathbb{R}_{\geq -\frac{1}{2}}$) の零点の reality について述べる。

まず、次の補題が成り立つ：

補題 5.1 *Bessel* 函数 $J_\nu(z)$ の零点は、$z=0$ を除いて、単根 *(simple zero)* のみである。

証明　前節で導入した微分作用素 ∇_ν を用いると、Leibniz rule より、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dz}\right)^n \nabla_\nu =& z^2 \left(\frac{d}{dz}\right)^{n+2} + (2n+1)z\left(\frac{d}{dz}\right)^{n+1} + (z^2-\nu^2+n^2)\left(\frac{d}{dz}\right)^n \\
&+ 2nz\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} + n(n-1)\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-2}
\end{aligned}$$

となる。よって、n に関する帰納法より、$z_0 \in \mathbb{C}$ が

$$J_\nu(z)|_{z=z_0} = \left.\frac{d}{dz}J_\nu(z)\right|_{z=z_0} = 0$$

を満たすとすると、任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、

$$\left.\frac{d^n}{dz^n}J_\nu(z)\right|_{z=z_0} = 0$$

となろことが示され、Taylor の定理より、$J_\nu(z) \equiv 0$ が従う。これは、矛盾。 $\square$

ここで、函数 $z^{-\nu}J_\nu(z)$ の零点を、$\pm j_{\nu,1}, \pm j_{\nu,2}, \cdots$ とし、これらは、

$$|\mathrm{Re} j_{\nu,1}| \leq |\mathrm{Re} j_{\nu,2}| \leq \cdots$$

となるうように並べておく。但し、$\mathrm{Re} j_{\nu,n} = 0$ の場合は、その imaginay part が正になるようにとり、imaginary part の小さいものから順に並べるものとする。$A, B \in \mathbb{R}_{>0}$ とし、$D \subset \mathbb{C}$ を $\pm A \pm \sqrt{-1}B$ を 4 つの頂点とする長方形とし、この長方形に含まれる $J_\nu(z)$ の零点は、$\pm j_{\nu,n}$ $(1 \leq n \leq m)$ のみとする。この状況の基で、積分

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_D \frac{z}{w(w-z)}\frac{J_{\nu+1}(w)}{J_\nu(w)}dw$$

について考察する。$z \in D \setminus \{\pm j_{\nu,n}\ (1 \leq n \leq m)\}$ とすると、この被積分函数の pole は、$w = z, \pm j_{\nu,1}, \cdots, \pm j_{\nu,m}$ のみであり、これらは、補題 5.1 により、全て 1 位の pole である。

<u>問い 5.1</u>　この被積分函数を w の函数と見なした時, $w = z$ における residue は

$$\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)}$$

であり、$w = \pm j_{\nu,n}$ における residue は (36) を用いて、

$$\frac{1}{z \mp j_{\nu,n}} \pm \frac{1}{j_{\nu,n}}$$

となることを示せ。 $\square$

従って、留数定理より、次の等式を得る：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_D \frac{z}{w(w-z)}\frac{J_{\nu+1}(w)}{J_\nu(w)}dw \\ =&\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)} + \sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{1}{z - j_{\nu,n}} + \frac{1}{j_{\nu,n}}\right\} + \sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{1}{z + j_{\nu,n}} - \frac{1}{j_{\nu,n}}\right\}.\end{aligned}$$

ここで、函数 $\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)}$ は奇函数なので、$\mathrm{Re} z \geq 0$ の場合だけ考察すれば良く、このとき、定理 4.8 より、函数 $\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)}$ は有界である。よって、$A, B \longrightarrow \infty$ とすると、

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_D \frac{z}{w(w-z)}\frac{J_{\nu+1}(w)}{J_\nu(w)}dw \longmapsto 0$$

となり (問い 5.2 このことを示せ), 次の等式を得る：

$$-\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-j_{\nu,n}}+\frac{1}{j_{\nu,n}}\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z+j_{\nu,n}}-\frac{1}{j_{\nu,n}}\right\}.$$

この式の両辺を積分することにより、

$$\exp\left\{-\int_0^z \frac{J_{\nu+1}(t)}{J_\nu(t)}dt\right\} = \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{j_{\nu,n}}\right)\exp\left(\frac{z}{j_{\nu,n}}\right)\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{j_{\nu,n}}\right)\exp\left(-\frac{z}{j_{\nu,n}}\right)\right\}$$

を得る。ここで、(36) より、

$$-\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)} = \frac{-z^{-\nu}J_{\nu+1}(z)}{z^{-\nu}J_\nu(z)} = \frac{d}{dz}\log\{z^{-\nu}J_\nu(z)\}$$

となるので、

$$\exp\left\{-\int_0^z \frac{J_{\nu+1}(t)}{J_\nu(t)}dt\right\} = \Gamma(\nu+1)\left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu}J_\nu(z)$$

を得る。 (問い 5.3 これを示せ。) 以上より、次の無限積表示を得た：

定理 5.2 $\nu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{<0}$ のとき、

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\prod_{m=1}^{\infty}\left\{1-\frac{z^2}{j_{\nu,n}^2}\right\}.$$

この公式は、$\nu = 0$ の場合に Euler によって、1781 年に得られ、その後、様々な人によって一般化された。

次に、Bessel 函数の直交性について調べ、その応用として、Bessel 函数の零点の reality について述べる。$\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ 及び、 $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ に対して、函数 $J_\mu(\alpha z), J_\nu(\beta z)$ は、それぞれ、次の微分方程式の解になることは、(31) より従う：

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}+\left(\alpha^2-\frac{\mu^2}{z^2}\right)u = 0, \tag{43}$$

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dv}{dz}+\left(\beta^2-\frac{\nu^2}{z^2}\right)v = 0. \tag{44}$$

従って、これらを組み合わせて $(z(v\times(43)-u\times(44))$ を考えよ), 次の微分方程式を得る：

$$\frac{d}{dz}\left[z\left\{v\frac{du}{dz}-u\frac{dv}{dz}\right\}\right]+\left[(\alpha^2-\beta^2)z+\frac{\nu^2-\mu^2}{z}\right]uv = 0. \tag{45}$$

ここで、$\mu = \nu$ とする。このとき、微分方程式 (45) を $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}$ s.t. $a < b)$ で積分することにより、次の等式を得る：

$$\int_a^b zJ_\nu(\alpha z)J_\nu(\beta z)dz = \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[z\left\{\beta J_\nu(\alpha z)J'_\nu(\beta z)-\alpha J'_\nu(\alpha z)J_\nu(\beta z)\right\}\right]_a^b. \tag{46}$$

特に、$\alpha=\beta$ のとき、右辺は不定形になっているので、$\beta=\alpha+\varepsilon$ とし、$\varepsilon\to 0$ なる極限を考察することにより、次の等式を得る (問い 5.4 これを示せ。)：

$$\int_a^b z\{J_\nu(\alpha z)\}^2 dz=\frac{1}{2}\left[z^2\left\{\{J'_\nu(\alpha z)\}^2+\left(1-\frac{\nu^2}{\alpha^2 z^2}\right)\{J_\nu(\alpha z)\}^2\right\}\right]_a^b. \tag{47}$$

ここで、更に、$\nu\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ を満たすものとし、これを固定する。

まず、$\alpha\neq\beta$ であり、かつ $J_\nu(\alpha)=J_\nu(\beta)=0$ を満たす場合について、考察する。このとき、(46) より、

$$\int_0^1 zJ_\nu(\alpha z)J_\nu(\beta z)dz=0 \tag{48}$$

を得る。次に、$\alpha=\beta$ の場合について、考察する。このとき、(47) 及び (36) より、次の等式を得る：

$$\int_0^1 z\{J_\nu(\alpha z)\}^2 dz=\frac{1}{2}\{J'_\nu(\alpha)\}^2=\frac{1}{2}\{J_{\nu+1}(\alpha)\}^2. \tag{49}$$

関係式 (48) より、次の Lommel による命題を示す。

命題 5.3 $\nu\in\mathbb{R}_{\geq -\frac{1}{2}}$ とする。このとき、*Bessel* 函数 $J_\nu(z)$ の零点は、全て実数である。

証明　$\alpha\in\mathbb{C}^*$ を $J_\nu(z)$ の零点とし、$\alpha\notin\mathbb{R}$ と仮定する。まず、$\alpha\in\sqrt{-1}\mathbb{R}$ とすると、級数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\frac{1}{2}\alpha)^{2m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)}$$

の各 summand は正の実数となることから、これは、あり得ない。次に、ν が実数なので、$\overline{\alpha}$ もまた、$J_\nu(z)$ の解になることに注意しておく。このとき、(46) より、

$$\begin{aligned}\int_0^x t|J_\nu(\alpha t)|^2 dt=&\int_0^x tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\overline{\alpha}t)dt\\ =&\frac{x}{\alpha^2-\overline{\alpha}^2}\left[J_\nu(\alpha x)\frac{d}{dx}J_\nu(\overline{\alpha}x)-J_\nu(\overline{\alpha}x)\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)\right]\end{aligned}$$

となるが、仮定より、$\alpha^2-\overline{\alpha}^2\neq 0$ ゆえ、

$$\int_0^1 t|J_\nu(\alpha t)|^2 dt=0$$

を得る。被積分函数の正値性より、これは矛盾。 □

そこで、Bessel 函数 $J_\nu(z)$ の零点のうち、正の実数のものを小さいものから順に $j_1, j_2, \cdots$ とおく。このとき、(48) 及び (49) より、次の補題が示された：

補題 5.4 $\nu\in\mathbb{R}_{\geq -\frac{1}{2}}$ とする。このとき、次の直交関係式が成立する：

$$\int_0^1 zJ_\nu(j_m z)J_\nu(j_n z)dz=\begin{cases}0 & m\neq n,\\ \frac{1}{2}\{J_{\nu+1}(j_m)\}^2 & m=n.\end{cases}$$

5.2 Fourier-Bessel 展開

ここでは、命題 5.3 及び 補題 5.4 に触発され、与えられた函数の Beesel 函数による展開がいつ可能か、という問題について考察する。なお、詳細は、1909 年に Proc. London Math.Soc. に出版された Hobson の論文、或いは [W] を参照せよ。

補題 5.4 より、Fourier 級数の類似として、函数 $f(x)$ がいつ、Bessel 函数 $\{J_\nu(j_m x)\}_{m=1}^{\infty}$ の一次結合で書けるか、つまり、表示

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_\nu(j_m x)$$

を持つか、という問題について考察する。もちろん、このような表示をもつとき、補題 5.4 より、b_m は次のように書ける：

$$b_m = \frac{2}{J_{\nu+1}(j_{m+1})^2} \int_0^1 t f(t) J_\nu(j_m t) dt.$$

まず、$0 < x \leq 1,\ 0 < t \leq 1$ に対して、函数 $T_n(x,t)$ を次で定義する：

$$T_n(t,x) := 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{J_\nu(j_m x) J_\nu(j_m t)}{J_{\nu+1}(j_m)^2}.$$

このとき、次の Riemann-Lebesgue の補題の類似が成立する：

補題 5.5 $a, b \in \mathbb{R}$ は $0 < a < b < 1$ を満たすとする。このとき、函数 $f(x)$ に対して、積分

$$\int_a^b t^{\frac{1}{2}} f(t) dt$$

が存在するならば、任意の $x \in [0,a) \cup (b,1]$ に対して、

$$\int_a^b t f(t) T_n(t,x) dt = o(1) \qquad n >> 0$$

が成り立つ。

この補題の証明は、[W] 等に譲ることにする。

補注 5.1 元々の *Riemann Lebesgue* の補題は、$\mathbb{R}^1$ の任意の有界閉区間 $[a,b]$ で *Lebesgue* 可積分な函数 を $f(x)$ とするとき、次の等式が成立することを云う：

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = 0.$$

このとき、以下の定理が成立する：

定理 5.6 $f(t)$ を $[0,1]$ 上定義される函数であって、函数 $t^{\frac{1}{2}}f(t)$ が $[0,1]$ 上、*Lebesgue* 可積分な函数とする。$\nu \in \mathbb{R}_{\geq -\frac{1}{2}}$ とし、

$$a_m := \frac{2}{J_{\nu+1}(j_m)^2}\int_0^1 tf(t)J_\nu(j_m t)dt$$

とおく。更に、$0 < a < b < 1$ なる実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、函数 $f(x)$ は $[a,b]$ 上、有界変動函数であるとする。このとき、$x \in [a,b]$ ならば、級数

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(j_m x)$$

は収束し、その和は、

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

で与えられる。これは、*Fourier-Bessel* 展開と呼ばれる。

<u>証明の概略</u>　補題 5.4 より、

$$\sum_{m=1}^{n} a_m J_\nu(j_m x) = \int_0^1 tf(t)T_n(t,x)dt$$

が成立し、更に、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \lim_{n\to\infty} x^{-\nu}f(x-0)\int_0^x t^{\nu+1}T_n(t,x)dt \\ + \lim_{n\to\infty} x^{-\nu}f(x+0)\int_x^1 t^{\nu+1}T_n(t,x)dt\end{aligned}$$

が成り立っている。因に、後半の式は、（ここでは証明しない）公式

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 t^{\nu+1}T_n(t,x)dt &= x^\nu, \qquad (0<x<1) \\ \lim_{n\to\infty}\int_0^x t^{\nu+1}T_n(t,x)dt &= \frac{1}{2}x^\nu, \qquad (0<x<1)\end{aligned}$$

より、従う。そこで、

$$\begin{aligned}S_n(x) := &\int_0^x t^{\nu+1}\{t^{-\nu}f(t)-x^{-\nu}f(x-0)\}T_n(t,x)dt \\ &+\int_x^1 t^{\nu+1}\{t^{-\nu}f(t)-x^{-\nu}f(x+0)\}T_n(t,x)dt\end{aligned}$$

とおくと、

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0$$

を示せば充分である。そこで、積分

$$\int_x^1 t^{\nu+1}\{t^{-\nu}f(t)-x^{-\nu}f(x+0)\}T_n(t,x)dt$$

について、以下では考察する。さて、函数 $t^{-\nu}f(t)-x^{-\nu}f(x+0)$ は $[x,b]$ 上、仮定より有界変動函数となっているので、$[x,b]$ 上のある有界な非負増加函数 $\chi_1(t),\chi_2(t)$ を用いて、

$$t^{-\nu}f(t)-x^{-\nu}f(x+0)=\chi_1(t)-\chi_2(t)$$

の様に表せる。但し、$\chi_1(x+0)=\chi_2(x+0)=0$ とする。よって、任意の $\varepsilon>0$ に対して、或 $\delta>0$ であって、 $\delta<b-x$ を満たし、且つ、$x\le t\le x+\delta$ なる t に対して、

$$0\le\chi_1(t)<\varepsilon,\qquad 0\le\chi_2(t)<\varepsilon$$

を満たすものが存在する。ここで、

$$\begin{aligned}&\int_x^1 t^{\nu+1}\{t^{-\nu}f(t)-x^{-\nu}f(x+0)\}T_n(t,x)dt\\=&\int_{x+\delta}^1 t^{\nu+1}\{t^{-\nu}f(t)-x^{-\nu}f(x+0)\}T_n(t,x)dt\\&+\int_x^{x+\delta} t^{\nu+1}\chi_1(t)T_n(t,x)dt-\int_x^{x+\delta} t^{\nu+1}\chi_2(t)T_n(t,x)dt\end{aligned}$$

と書くと、右辺の第 1 項は 補題 5.5 より、n を充分大きく取れば、ε で押さえられる。また、右辺の第 2 項については、平均値の定理より、$0<\xi<\delta$ なる $\xi\in\mathbb{R}$ であって、

$$\int_x^{x+\delta} t^{\nu+1}\chi_1(t)T_n(t,x)dt=\chi_1(x+\delta)\int_{x+\xi}^{x+\delta} t^{\nu+1}T_n(t,x)dt$$

を満たすものが存在する。このことから、n を充分大きくとると、第 2 項は $U\varepsilon$ $(\exists U>0)$ で押さえられ、第 3 項も同様に $U\varepsilon$ で押さえられることが従う。$S_n(x)$ の定義式において、$\int_0^x\cdots dt$ の部分も同様の評価をすることにより、

$$\sum_{m=1}^n a_mJ_\nu(j_mx)\quad と\quad \frac{1}{2}\{f(x-0)+f(x+0)\}$$

の差を、$(4U+2)\varepsilon$ で押さえることができる。 □

参考文献

[AAR] Andrews G. E., Askey R. and Roy R., *Special Functions*, Encycl. Math. and its Appl. **71**, Cambridge, 1999.

[I] 犬井 鉄郎、特殊函数、岩波文庫、1962.

[O] Frank W. J. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, AKP Classics, A K Peters, 1997.

[W] Watson G.N., *A Treatise on the theory of Bessel Functions*, Cambridge Math. Library, 2nd. ed. , Cambridge, 1944.