Lebesgue積分 講義スライド

担当教員：伊藤健一

2021年1月12日版

この講義について

内容： 以下に沿って，Lebesgue積分の基本事項を解説する：

参考書： 伊藤清三「ルベーグ積分入門」（裳華房）
谷島賢二「ルベーグ積分と関数解析」（朝倉書店）

第1章 Riemann積分の復習

§ 1.1 Riemann積分の定義

- 区間$[a,b]\subset\mathbb{R}$に対し，両端点を含む相異なる有限個の点の集合
$$\Delta=\{x_0,\dots,x_n\};\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$
を$[a,b]$の**分割**と呼ぶ．各点x_jを分割Δの**分点**と呼ぶことにする．

- **分割の幅**$|\Delta|$を
$$|\Delta|=\max_{j=1,\dots,n}(x_j-x_{j-1})$$
で定義する．

- 分割の各小区間の任意の1点$\xi_j\in[x_{j-1},x_j]$をその小区間の**代表点**と呼び，代表点の集合$\xi=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$を**代表点列**と呼ぶことにする．

関数$f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$および分割$\Delta$とその代表点列$\xi$に対し，和

$$I(f;\Delta,\xi)=\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j-x_{j-1})$$

を**Riemann和**と呼ぶ.

定義. 関数$f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$が**Riemann可積分**（**積分可能**）であるとは，ある$I\in\mathbb{R}$が存在して，任意の$\epsilon>0$に対しある$\delta>0$をとれば

$$|\Delta|<\delta \text{ かつ } \xi \text{ は } \Delta \text{ の代表点列} \quad\Rightarrow\quad |I-I(f;\Delta,\xi)|<\epsilon,$$

とできることである．このとき

$$I=I(f)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{|\Delta|\to 0} I(f;\Delta,\xi)$$

と書く.

問　$f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$がRiemann可積分であれば，$f$は有界であることを示せ.

§ 1.2 下積分・上積分

有界関数$f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$と分割$\Delta$に対し，

$$s(f;\Delta)=\sum_{j=1}^{n}\left[\inf_{\xi_j\in[x_{j-1},x_j]} f(\xi_j)\right](x_j-x_{j-1}),$$
$$S(f;\Delta)=\sum_{j=1}^{n}\left[\sup_{\xi_j\in[x_{j-1},x_j]} f(\xi_j)\right](x_j-x_{j-1})$$

をそれぞれ**不足和**，**過剰和**と呼ぶ．明らかに

$$\begin{aligned}-\infty<\left[\inf_{x\in[a,b]} f(x)\right](b-a)\le s(f;\Delta)\le I(f;\Delta,\xi)&\\ \le S(f;\Delta)\le\left[\sup_{x\in[a,b]} f(x)\right](b-a)<\infty&\end{aligned}\tag{$\spadesuit$}$$

が成り立つ.

命題 1.1. 有界関数$f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$に対し，

$$s(f):=\sup_{\Delta} s(f;\Delta)<\infty,\qquad S(f):=\inf_{\Delta} S(f;\Delta)>-\infty$$

が存在する．さらに$s(f)\le S(f)$が成り立つ.

※　$s(f), S(f)$をそれぞれfの**下積分**，**上積分**と呼ぶ.

Δ,Δ'を$[a,b]$の分割とする.

- Δの任意の分点がΔ'の分点であるとき，Δ'はΔの**細分**であるといい，$\Delta\subset\Delta'$ と書くことにする.
- ΔとΔ'のすべての分点を合わせて得られる新たな分割を，ΔとΔ'の**合併**と呼び，$\Delta\cup\Delta'$で表すことにする.

このとき，次が成り立つことは明らかである：

$$\Delta\subset\Delta\cup\Delta',\qquad \Delta'\subset\Delta\cup\Delta'.$$

補題 1.2. 有界関数$f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$と分割$\Delta,\Delta'$に対し，$\Delta\subset\Delta'$ならば

$$s(f;\Delta)\le s(f;\Delta')\le S(f;\Delta')\le S(f;\Delta)$$

が成り立つ.

証明. 省略する.（**問**とする）　□

命題 1.1の証明. 上限，下限の存在は($\spadesuit$)と実数の連続性から分かる．任意の分割Δ,Δ'に対し，補題 1.2より

$$s(f;\Delta)\le s(f;\Delta\cup\Delta')\le S(f;\Delta\cup\Delta')\le S(f;\Delta')$$

なので，特に

$$s(f;\Delta)\le S(f;\Delta')$$

である．左辺の上限，右辺の下限をとって$s(f)\le S(f)$を得る.　□

§ 1.3 Darbouxの定理

定理 1.3 (Darbouxの定理). 有界関数$f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$に対し，

$$s(f)=\lim_{|\Delta|\to 0}s(f;\Delta),\quad S(f)=\lim_{|\Delta|\to 0}S(f;\Delta)$$

が成り立つ．すなわち，任意の$\epsilon>0$に対しある$\delta>0$が存在して，$|\Delta|<\delta$を満たす任意の分割Δに対して

$$0\le s(f)-s(f;\Delta)<\epsilon,\quad 0\le S(f;\Delta)-S(f)<\epsilon$$

が成り立つ．

※　この定理により下限・上限操作と極限操作が関係づけられる．下限・上限は，その存在が実数の連続性によりすぐに保証されるため，理論的には使いやすいが，直感的な意味はやや捉えづらい．一方，極限操作は直感的には分かりやすいが，その存在を直接的に示すことは少し難しい．

証明. 下積分のみ示す．任意の$\epsilon>0$に対し，ある分割Δ_0を

$$s(f)-\epsilon<s(f;\Delta_0)\qquad(\heartsuit)$$

ととる．Δ_0の分点の個数を(n_0+2)とする．任意の分割Δと$\Delta_0\cup\Delta$を比較すると分点が追加される区間は高々n_0個しかない．このことに注意すると

$$\begin{aligned}s(f;\Delta_0)-s(f;\Delta)&\le s(f;\Delta_0\cup\Delta)-s(f;\Delta)\\&\le 2n_0\left(\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\right)|\Delta|\end{aligned}$$

なので，$|\Delta|$を十分小さくとることで，

$$s(f;\Delta_0)-s(f;\Delta)<\epsilon\qquad(\clubsuit)$$

とできる．したがって，($\heartsuit$)と($\clubsuit$)より，$|\Delta|$が十分小さければ

$$s(f)-2\epsilon<s(f;\Delta)\le\sup_{\Delta}s(f;\Delta)=s(f)$$

となる．よって主張が示された．□

定理 1.4. 有界関数$f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$に対し，以下の条件は互いに同値である：

1. fは$[a,b]$上でRiemann積分可能である；
2. $|\Delta_k|\to 0$を満たす任意の分割の列Δ_kとその任意の代表点列の列$\xi^{(k)}$に対して，$I(f;\Delta_k,\xi^{(k)})$は$k\to\infty$で収束する；
3. $|\Delta_k|\to 0$となる任意の分割の列Δ_kに対し$S(f;\Delta_k)-s(f;\Delta_k)\to 0$；
4. $\epsilon>0$に対して，ある分割Δが存在して$S(f;\Delta)-s(f;\Delta)<\epsilon$；
5. $s(f)=S(f)$.

※　1.と5.の同値性が特に重要であり，他はそうでもない（と思う）．この同値性に基づいて，Riemann可積分性を5.で定義する流儀もよくある．

証明. (1. ⇒ 2.)　自明である．

(2. ⇒ 3.)　2を仮定する．まず極限値

$$I:=\lim_{k\to\infty}I(f;\Delta_k,\xi^{(k)})$$

は$\Delta_k,\xi^{(k)}$の取り方に依存しないことに注意する．実際，条件を満たす2組の$\Delta_k,\xi^{(k)}$と$\Delta'_k,\xi'^{(k)}$をとると，それらを交互にならべてできる$\Delta''_k,\xi''^{(k)}$も条件を満たしており，さらにそれは$\Delta_k,\xi^{(k)}$と$\Delta'_k,\xi'^{(k)}$を部分列として含むので，結局

$$\lim_{k\to\infty}I(f;\Delta_k,\xi^{(k)})=\lim_{k\to\infty}I(f;\Delta''_k,\xi''^{(k)})=\lim_{k\to\infty}I(f;\Delta'_k,\xi'^{(k)})$$

となる．

さて，$|\Delta_k| \to 0$ を満たす任意の分割の列 Δ_k に対し，

$$S(f;\Delta_k) - s(f;\Delta_k) \to 0$$

となることを示そう．任意の $\epsilon > 0$ に対し，$\xi^{(k)}, \xi'^{(k)}$ を

$$s(f;\Delta_k) + \epsilon > I(f;\Delta_k,\xi^{(k)}), \quad S(f;\Delta_k) - \epsilon < I(f;\Delta_k,\xi'^{(k)})$$

のように選ぶ．ここで K を十分大きくとれば，任意の $k > K$ に対して

$$s(f;\Delta_k) + \epsilon > I - \epsilon, \quad S(f;\Delta_k) - \epsilon < I + \epsilon$$

となる．これらを合わせると，任意の $k > K$ に対して

$$S(f;\Delta_k) - s(f;\Delta_k) < 4\epsilon$$

となることが分かり，これは3. が成り立つことを意味する．

(3. ⇒ 4. ⇒ 5.)　自明である．

(5. ⇒ 1.)　不等式(♠)とDarbouxの定理による．　□

系 1.5. 任意の連続関数 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ はRiemann可積分である．

証明. 条件より f は $[a,b]$ 上で有界である．よって，定理 1.4の4. を確かめればよい．まず，$[a,b]$ の任意の分割 $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ に対して

$$S(f;\Delta) - s(f;\Delta) \le (b-a) \max_{j=1,\ldots,n} \sup_{\xi,\eta\in[x_{j-1},x_j]} \left| f(\xi) - f(\eta) \right|$$

である．ここで，f が $[a,b]$ 上で一様連続であることに注意すると，任意の $\epsilon > 0$ に対し，$|\Delta|$ を十分小さくとって

$$\sup_{\xi,\eta\in[x_{j-1},x_j]} \left| f(\xi) - f(\eta) \right| < \epsilon/(b-a)$$

とできる．よって定理 1.4の4. が確かめられた．　□

第２章 抽象的測度空間上でのLebesgue積分

§ 2.1 約束

本講義では，$\pm\infty$ を含めた**拡張された実数**，**拡張された複素数**をそれぞれ

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,\infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad \overline{\mathbb{C}} = \overline{\mathbb{R}} + i\overline{\mathbb{R}}$$

で表す．四則演算を $\overline{\mathbb{R}}$ に以下のように拡張する：任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$a \pm \infty = \pm\infty + a = \pm\infty, \quad \pm\infty \pm \infty = \pm\infty, \quad a/(\pm\infty) = 0$$

とし，また $a \in (0,\infty]$ に対し

$$(\pm a)(\pm\infty) = (\pm\infty)(\pm a) = \infty, \quad (\pm a)(\mp\infty) = (\mp\infty)(\pm a) = -\infty$$

と定める．さらに（便宜上の理由から）

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$$

とする．ただし，$\pm\infty \mp \infty$, ∞/∞ は考えないものとする．$\overline{\mathbb{C}}$ での四則演算についても同様とする．また，$\overline{\mathbb{R}}$ に自然な大小関係を導入する．

以下，本講義では，X は空ではない抽象集合とする．

§ 2.2 可測空間

定義. X の部分集合の族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X) = 2^X$ が

1. $\emptyset \in \mathcal{B}$（※ このことから特に $\mathcal{B} \neq \emptyset$ である），
2. 任意の $E \in \mathcal{B}$ に対し，$E^c \in \mathcal{B}$,
3. 任意の $E_j \in \mathcal{B}$, $j = 1, 2, \ldots,$ に対し，$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{B}$,

を満たすとき，$\mathcal{B}$ を X 上の**完全加法族**（**可算加法族**，**σ 集合族**，**σ 集合代数**，**σ 代数**，**σ 集合体**）と呼ぶ．$\mathcal{B}$ の元を**可測集合**，組 $(X, \mathcal{B})$ を**可測空間**と呼ぶ．

例　$\mathcal{B}_{\mathrm{min}} = \{\emptyset, X\}$，$\mathcal{B}_{\mathrm{max}} = \mathcal{P}(X)$ は X 上の完全加法族であり，包含関係に関して，それぞれ**最小**，**最大**である．すなわち，X 上の任意の完全加法族 $\mathcal{B}$ に対して，$\mathcal{B}_{\mathrm{min}} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{B}_{\mathrm{max}}$ が成り立つ．

命題 2.1. $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ を完全加法族とする．このとき，以下が成り立つ．

1. $X \in \mathcal{B}$;
2. 任意の $E, F \in \mathcal{B}$ に対し，$E \setminus F \in \mathcal{B}$;
3. 任意の $E_j \in \mathcal{B}$, $j = 1, 2, \ldots,$ に対し，$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{B}$.

証明. $X = \emptyset^c$ により 1. がわかる．2.，3. も

$$E \setminus F = E \cap (F^c) = (E^c \cup F)^c, \qquad \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^c\right)^c$$

と書き換えられることを用いればよい．□

※　完全加法族は「高々可算回の集合演算について閉じた族」と言える．

命題 2.2. 任意の $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ に対し，$\mathcal{A}$ を含む最小の完全加法族 $\sigma(\mathcal{A})$ が存在する．すなわち $\mathcal{A}$ を含むある完全加法族 $\sigma(\mathcal{A})$ が存在して，$\mathcal{A}$ を含む任意の完全加法族 $\mathcal{B}$ に対して $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ が成り立つ．特に $\sigma(\mathcal{A})$ は一意的である．

証明. 求める $\sigma(\mathcal{A})$ は

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap \mathfrak{B}(\mathcal{A});$$
$$\mathfrak{B}(\mathcal{A}) = \Big\{\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X);\ \mathcal{B} \text{ は } X \text{ 上の完全加法族で } \mathcal{A} \subset \mathcal{B}\Big\}$$

として構成される．これを確かめる．ここで共通部分 $\bigcap \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ とは，

$$E \in \bigcap \mathfrak{B}(\mathcal{A}) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \mathcal{B} \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})\ E \in \mathcal{B}$$

で定義される集合族であり，

$$\bigcap \mathfrak{B}(\mathcal{A}) = \bigcap \Big\{\mathcal{B};\ \mathcal{B} \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})\Big\} = \bigcap_{\mathcal{B} \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})} \mathcal{B}$$

などとも表される．

まず，$\mathcal{P}(X) \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ なので $\mathfrak{B}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ であることに注意しておく．

$\sigma(\mathcal{A})$ が完全加法族であることを確かめる．まず，

$$\forall \mathcal{B} \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}) \quad \emptyset \in \mathcal{B}$$

なので，共通部分の定義より $\emptyset \in \sigma(\mathcal{A})$ である．次に，$E \in \sigma(\mathcal{A})$ とすると，

$$\forall \mathcal{B} \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}) \quad E \in \mathcal{B} \qquad \therefore\ \forall \mathcal{B} \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}) \quad E^c \in \mathcal{B}$$

なので，$E^c \in \sigma(\mathcal{A})$ を得る．可算和についても同様なので，証明を省略する．

最小性はその構成から明らかである．一意性は最小性から従う．□

例　X が位相空間のとき，その開集合族 $\mathcal{O}$ を含む最小の完全加法族 $\sigma(\mathcal{O})$ を X の **Borel 集合族**と呼び，$\mathcal{B}(X)$ で表す．$\mathcal{B}(X)$ の元を **Borel 集合**と呼ぶ．

§ 2.3 測度空間

定義. $(X, \mathcal{B})$ を可測空間とする．関数 $\mu\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ が

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. 任意の互いに素な $E_j \in \mathcal{B}$, $j = 1, 2, \ldots,$ に対し，

$$\mu\Big(\sum_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \quad \text{（\textbf{完全加法性}）},$$

を満たすとき，μ を $(X, \mathcal{B})$ 上の**測度**と呼ぶ．組 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を**測度空間**と呼ぶ．

※　任意の $j \neq k$ に対し $E_j \cap E_k = \emptyset$ が成り立つとき，E_j, $j = 1, 2, \ldots,$ は**互いに素**であるという．このとき，$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_j = \sum_{n=1}^{\infty} E_j$ とも書く．

※　X が位相空間のとき，$(X, \mathcal{B}(X))$ 上の測度を **Borel 測度**と呼ぶ．

例 2.3（数え上げ測度）. $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ 上の**数え上げ測度** $\#$ を

$$\#E = \sum_{j \in E} 1 = (E \text{の元の個数}) \quad \text{for } E \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}),$$

により定めると，$(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \#)$ は測度空間となる．

例 2.4. 任意の $-\infty \leq a_j \leq b_j \leq \infty$, $j = 1, \ldots, d$, に対し

$$(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$$

の形の集合を（**左**）**半開区間**と呼ぶ．ただし，$(a, a] = \emptyset$, $(a, \infty] = (a, \infty)$ などと解釈するものとする．半開区間全体の集合を

$$\mathcal{I}(\mathbb{R}^d) = \Big\{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d;\ -\infty \leq a_j \leq b_j \leq \infty\Big\}$$

と書き，また任意の $I = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$m(I) = (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_d - a_d) \in [0, \infty]$$

とおく．ここで規約 $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ に注意せよ．

例 2.4 の続き. 以上の記号の下，$(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の測度 $\mu_{\mathcal{B}}$ で

$$\mu_{\mathcal{B}}(I) = m(I) \quad \text{for all } I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^d).$$

を満たすものが一意的に存在する．構成と証明については定義 3.10 および定理 3.8 を参照せよ．

問　$\sigma(\mathcal{I}(\mathbb{R}^d)) = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ を示せ．

問　$A \subset \mathbb{R}$ を高々可算な部分集合とする．例 2.4 の主張を認めて，$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ かつ $\mu_{\mathcal{B}}(A) = 0$ であることを示せ．

※　なお逆は成り立たない：非可算集合 $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ で $\mu_{\mathcal{B}}(E) = 0$ を満たすものが存在する．

解. まず 1 点集合 $A = \{a\} \subset \mathbb{R}$ のとき，

$$A = \{a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a - 1/n, a], \quad (a - 1/n, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

なので，$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である．さらに，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mu_{\mathcal{B}}(A) = \mu_{\mathcal{B}}(\{a\}) \leq \mu_{\mathcal{B}}((a - 1/n, a]) = 1/n$$

なので，$\mu_{\mathcal{B}}(A) = 0$ を得る．

次に $A = \{a_j\} \subset \mathbb{R}$ を高々可算集合とする．すると上に示したことから

$$A = \bigcup_j \{a_j\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mu_{\mathcal{B}}(A) = \sum_j \mu_{\mathcal{B}}(\{a_j\}) = 0$$

である．　□

例 2.5 (Lebesgue–Stieltjes測度). $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$を単調非減少な右連続関数とする．$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$の上の測度$\mu_g$で

$$\mu_g(I) = g(b) - g(a) \quad \text{for all } I = (a, b] \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$$

を満たすものが一意的に存在する．このようなμ_gを**Lebesgue–Stieltjes測度**と呼ぶ.

※　後述の命題 2.7の2.より

$$\lim_{n\to\infty} \mu_g\Big((a, b + n^{-1}]\Big) = \mu_g((a, b])$$

が成り立つ必要があるので，gの右連続性は落とすことができない.

※　特に$g(x) = x$のとき，μ_gは例 2.4で$d = 1$とした$\mu_{\mathcal{B}}$に一致する.

※　構成は次の章で行う．多次元へ拡張することもできる.

命題 2.6. $(X, \mathcal{B}, \mu)$を測度空間とする．このとき，以下が成り立つ.

1. 任意の$E, F \in \mathcal{B}$に対し，$E \subset F$であれば$\mu(E) \le \mu(F)$；
2. 任意の$E_j \in \mathcal{B}$, $j = 1, 2, \ldots,$ に対し，$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\Big) \le \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j)$.

証明. $G = F \setminus E \in \mathcal{B}$とすれば，$E$と$G$は互いに素なので，

$$\mu(F) = \mu(E + G) = \mu(E) + \mu(G) \ge \mu(E)$$

となる．また，$F_1 = E_1$，$F_j = E_j \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{j-1} E_k\Big)$, $j = 2, 3, \ldots,$ とおけば，同様にして

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\Big) = \mu\Big(\sum_{j=1}^\infty F_j\Big) = \sum_{j=1}^\infty \mu(F_j) \le \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j)$$

を得る．　□

命題 2.7. $(X, \mathcal{B}, \mu)$を測度空間とし，$E_j \in \mathcal{B}$, $j = 1, 2, \ldots,$ とする．このとき，以下が成り立つ.

1. $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ ならば，

$$\lim_{j\to\infty} \mu(E_j) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\Big);$$

2. $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ かつ$\mu(E_1) < \infty$ならば，

$$\lim_{j\to\infty} \mu(E_j) = \mu\Big(\bigcap_{j=1}^\infty E_j\Big).$$

問　一般に，2.の仮定 “$\mu(E_1) < \infty$” は落とせないことを確かめよ.

証明. 1.　$F_1 = E_1$，$F_j = E_j \setminus E_{j-1}$, $j = 2, 3, \ldots,$ とおけば，

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\Big) &= \mu\Big(\sum_{j=1}^\infty F_j\Big) = \sum_{j=1}^\infty \mu(F_j) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \mu(F_j) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\sum_{j=1}^n F_j\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)\end{aligned}$$

を得る.

2.　$F_j = E_1 \setminus E_j$, $j = 1, 2, \ldots,$ とおくと，$F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ なので，1.の結果により

$$\lim_{j\to\infty} \mu(F_j) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^\infty F_j\Big) = \mu\Big(E_1 \setminus \Big(\bigcap_{j=1}^\infty E_j\Big)\Big)$$

が成り立つ．ここで

$$\mu(E_1)=\mu(F_j)+\mu(E_j)=\mu\Big(E_1\setminus\big(\bigcap_{j=1}^{\infty}E_j\big)\Big)+\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}E_j\Big)$$

において，$\mu(E_1)<\infty$ に注意すると，有限性より，項を移項できて

$$\mu(F_j)=\mu(E_1)-\mu(E_j),$$
$$\mu\Big(E_1\setminus\big(\bigcap_{j=1}^{\infty}E_j\big)\Big)=\mu(E_1)-\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}E_j\Big)$$

と書ける．これらを上の等式に代入すると

$$\mu(E_1)-\lim_{j\to\infty}\mu(E_j)=\mu(E_1)-\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}E_j\Big)$$

となって，示すべき等式が得られる． □

定義. $(X,\mathcal{B},\mu)$, $(Y,\mathcal{C},\nu)$ を測度空間とする．$(Y,\mathcal{C},\nu)$ は $(X,\mathcal{B},\mu)$ の**拡張**である（または $(Y,\mathcal{C},\nu)$ は $(X,\mathcal{B},\mu)$ を**含む**）とは，

$$X\subset Y,\quad \mathcal{B}\subset\mathcal{C},\quad \mu=\nu|_{\mathcal{B}}$$

が成り立つこととし，これを

$$(X,\mathcal{B},\mu)\subset(Y,\mathcal{C},\nu)$$

で表すことにする.（逆の関係を，**制限**，**含まれる**と言うことにする.）

例. $(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とする．任意の $E\in\mathcal{B}$ に対し，

$$\mathcal{B}_E=\{F\subset E;\ F\in\mathcal{B}\},\quad \mu_E=\mu|_{\mathcal{B}_E}$$

とおくと，$(E,\mathcal{B}_E,\mu_E)$ は測度空間であり，$(X,\mathcal{B},\mu)$ の制限である．

例 2.8. 例 2.4 の $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\mu_{\mathcal{B}})$ は

$$\mathcal{I}(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\quad \mu_{\mathcal{B}}(I)=m(I)\quad \text{for all } I\in\mathcal{I}(\mathbb{R}^d)$$

を満たす最小の測度空間として特徴づけられる．

例 2.9. 例 2.5 の $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mu_g)$ は

$$\mathcal{I}(\mathbb{R})\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}),\quad \mu_g(I)=g(b)-g(a)\quad \text{for all } I=(a,b]\in\mathcal{I}(\mathbb{R})$$

を満たす最小の測度空間として特徴づけられる．

§ 2.4 完備性

この小節では常に，$(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とする．

定義. 1. $E\in\mathcal{B}$ で $\mu(E)=0$ を満たすものを**零集合**と呼ぶ．

2. $(X,\mathcal{B},\mu)$ が**完備**であるとは，以下が成り立つことである：

$$E\in\mathcal{B},\ \mu(E)=0,\ F\subset E\quad\Rightarrow\quad F\in\mathcal{B}.$$

3. $(X,\mathcal{B},\mu)$ の最小の完備拡張を $(X,\mathcal{B},\mu)$ の**完備化**と呼ぶ．

※　一般に，任意の測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ に対し，X を共通の底空間とする完備化 $(X,\overline{\mathcal{B}},\overline{\mu})$ が以下のように構成される（定理 2.10）．

○ **完備化の構成**

集合族$\overline{\mathcal{B}} \subset \mathcal{P}(X)$を
$$\overline{\mathcal{B}} = \left\{E \subset X;\ \exists F, G \in \mathcal{B} \text{ s.t. } F \subset E \subset G,\ \mu(G \setminus F) = 0\right\}$$
で定義する．

また，関数$\overline{\mu}\colon \overline{\mathcal{B}} \to [0,\infty]$を，任意の$E \in \overline{\mathcal{B}}$に対し上の条件のような$F, G \in \mathcal{B}$をとって
$$\overline{\mu}(E) = \mu(F) = \mu(G)$$
で定義する．

Well-definedであることの証明． まず条件を満たす$F, G \in \mathcal{B}$に対し，
$$\mu(G) = \mu(F) + \mu(G \setminus F) = \mu(F)$$
である．もし，別の$F', G' \in \mathcal{B}$も同じ条件を満たしていれば，$F' \setminus F \subset G \setminus F$に注意して，
$$\mu(F \cup F') = \mu(F) + \mu(F' \setminus F) = \mu(F)$$
となる．対称性によりF, F'を入れ替えた等式も成立するので，
$$\mu(F) = \mu(F \cap F') = \mu(F')$$
であり，$\overline{\mu}\colon \overline{\mathcal{B}} \to [0,\infty]$は確かにwell-definedである． □

定理 2.10. $(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu})$は$(X, \mathcal{B}, \mu)$の完備化である．

証明． Step 1．　まずは$\overline{\mathcal{B}}$が$\mathcal{B}$を含む完全加法族であることを示す．$\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}}$が成り立つことはすぐにわかる．すると特に$\emptyset \in \overline{\mathcal{B}}$である．

$E \in \overline{\mathcal{B}}$とし，$F, G \in \mathcal{B}$を
$$F \subset E \subset G, \quad \mu(G \setminus F) = 0$$
となるようにとる．すると
$$G^c \subset E^c \subset F^c, \quad \mu(F^c \setminus G^c) = \mu(G \setminus F) = 0$$
なので，$E^c \in \overline{\mathcal{B}}$である．

$E_j \in \overline{\mathcal{B}}$, $j = 1, 2, \ldots,$ とし，$F_j, G_j \in \mathcal{B}$を
$$F_j \subset E_j \subset G_j, \quad \mu(G_j \setminus F_j) = 0$$
となるようにとる．ここで，
$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \quad F = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \in \mathcal{B}, \quad G = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \in \mathcal{B}$$
とおく．まず明らかに$F \subset E \subset G$である．また
$$G \setminus F = \bigcup_{j=1}^{\infty} (G_j \setminus F) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (G_j \setminus F_j)$$
なので，
$$0 \le \mu(G \setminus F) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_j \setminus F_j) = 0$$
を得る．よって$E \in \overline{\mathcal{B}}$である．

Step 2.　次に$\overline{\mu}$が$\overline{\mathcal{B}}$上の測度であることを示す．完全加法性を確かめればよい．$E_j \in \overline{\mathcal{B}}$, $j = 1, 2, \ldots,$ は互いに素であるとする．このとき，ある$F_j, G_j \in \mathcal{B}$で

$$F_j \subset E_j \subset G_j, \quad \mu(G_j \setminus F_j) = 0$$

を満たすものが存在する．そこで，

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \overline{\mathcal{B}}, \quad F = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \in \mathcal{B}, \quad G = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \in \mathcal{B}$$

とおくと，Step 1. と同様にして$F \subset E \subset G$, $\mu(G \setminus F) = 0$が分かる．F_jが互いに素であることとμの完全加法性に注意すると

$$\overline{\mu}(E) = \mu(F) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_j)$$

を得る．

Step 3.　$(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu})$が完備であることを示す．

$$N \in \overline{\mathcal{B}}, \quad \overline{\mu}(N) = 0, \quad A \subset N$$

とする．$F, G \in \mathcal{B}$を

$$F \subset N \subset G, \quad \mu(G \setminus F) = 0$$

ととる．このとき，$\mu(F) = \overline{\mu}(N) = 0$に注意すると

$$\emptyset \subset A \subset G, \quad \mu(G) = \mu(G \setminus F) + \mu(F) = 0$$

であり，したがって，$A \in \overline{\mathcal{B}}$である．

Step 4.　最小性を示す．$(Y, \mathcal{C}, \nu)$を$(X, \mathcal{B}, \mu)$の任意の完備拡張とする．まず拡張の定義から$X \subset Y$である．次に，$E \in \overline{\mathcal{B}}$とする．$F, G \in \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$を

$$F \subset E \subset G, \quad \nu(G \setminus F) = \mu(G \setminus F) = 0$$

ととる．$G \setminus F$がν零集合であることと$E \setminus F \subset G \setminus F$より，$E \setminus F \in \mathcal{C}$であり，よって

$$E = (E \setminus F) \cup F \in \mathcal{C}$$

を得る．さらに

$$\nu(E) = \nu(E \setminus F) + \nu(F) = \nu(F) = \mu(F) = \overline{\mu}(E)$$

なので，$\nu|_{\overline{\mathcal{B}}} = \overline{\mu}$を得る．　□

例. 例 2.3の測度空間$(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \#)$において，零集合は空集合$\emptyset$のみである．特に，$(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \#)$は完備である．

※　一般には，零集合は必ずしも空集合ではない．

例 2.11（Lebesgue測度空間）. 例 2.4の測度空間$(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu_{\mathcal{B}})$の完備化を**Lebesgue測度空間**と呼び，$(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mu_{\mathcal{L}})$で表す．特に，例 2.4の主張を認めれば，$(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mu_{\mathcal{L}})$は

$$\mathcal{I}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \quad \mu_{\mathcal{L}}(I) = m(I) \quad \text{for all } I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^d)$$

を満たす最小の完備測度空間である．

※　本講義では証明を与えないが，$(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu_{\mathcal{B}})$は完備ではなく，よって特に，$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$である．しかし，$\mu_{\mathcal{B}}$と$\mu_{\mathcal{L}}$は区別せず，単に$\mu$と書かれることが多い．本講義でも区別の必要がない場合は，そのようにする．

§ 2.5 可測関数

この小節では常に，$(X,\mathcal{B})$ を可測空間とし，$E\in\mathcal{B}$ とする．

定義． 1．$f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ とする．任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して

$$E(f>\alpha):=\{x\in E;\ f(x)>\alpha\}\in\mathcal{B}$$

が成り立つとき，f は E 上で $\mathcal{B}$ **可測**であるという．

2．$f\colon E\to\overline{\mathbb{C}}$ とする．$\mathrm{Re}\, f$ および $\mathrm{Im}\, f$ がともに E 上で $\mathcal{B}$ 可測なとき，f は E 上で $\mathcal{B}$ **可測**であるという．

※　定義により，$\overline{\mathbb{C}}$ 値可測関数についての議論は大体 $\overline{\mathbb{R}}$ 値の場合に帰着する．よって，本節では以下 $\overline{\mathbb{R}}$ 値の可測関数についてのみ考える．

命題 2.12. 関数 $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ に対し，以下は互いに同値である：

1．任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して $E(f>\alpha)\in\mathcal{B}$；

2．任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して $E(f\geq\alpha)\in\mathcal{B}$；

3．$E(f=\infty)\in\mathcal{B}$ かつ任意の $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対して $E(\alpha<f<\beta)\in\mathcal{B}$；

4．$E(f=\infty)\in\mathcal{B}$ かつ任意の開集合 $O\subset\mathbb{R}$ に対して $f^{-1}(O)\in\mathcal{B}$；

5．$E(f=\infty)\in\mathcal{B}$ かつ任意の $G\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して $f^{-1}(G)\in\mathcal{B}$.

特に f が可測であれば，任意の $\alpha\in\overline{\mathbb{R}}$ に対して $E(f=\alpha)\in\mathcal{B}$ が成り立つ．

※　この命題により，可測性の定義における $E(f>\alpha)$ は $E(f\geq\alpha)$ で置き換えてよいことがわかる．他にも $E(f\leq\alpha)$ 等で置き換えることができるが，$E(f=\alpha)$ を用いることはできないので注意が必要である．

証明． (1. ⇒ 2.)　任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して

$$E(f\geq\alpha)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\bigl(f>\alpha-n^{-1}\bigr)$$

と書けることに注意すればよい．

(2. ⇒ 1.)　同様に，任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して

$$E(f>\alpha)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\bigl(f\geq\alpha+n^{-1}\bigr)$$

と書けることに注意すればよい．

(1. ⇒ 3.)　詳細は省略する．

$$E(f=\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f>n)$$

および 2. を用いればよい．

(3. ⇒ 4.)　任意の開集合 $O\subset\mathbb{R}$ に対し，

$$O=\bigcup\{(q,r)\subset\mathbb{R};\ q,r\in\mathbb{Q},\ (q,r)\subset O\}$$

が成り立つ．すると

$$f^{-1}(O)=\bigcup\{E(q<f<r)\subset\mathbb{R};\ q,r\in\mathbb{Q},\ (q,r)\subset O\}$$

と書けるので，4. が従う．

(4. ⇒ 5.)　$\mathcal{G}=\{G\subset\mathbb{R};\ f^{-1}(G)\in\mathcal{B}\}$ とおくと，仮定により $\mathcal{G}$ は $\mathbb{R}$ の任意の開集合を含む．また，逆像の性質から $\mathcal{G}$ は完全加法族である．よって，Borel 集合族の最小性から $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{G}$ となって，5. が従う．

(5. ⇒ 1.)　自明である．

最後の主張も難しくないので省略する．　□

命題 2.13. $f, g\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$を$\mathcal{B}$可測関数，$\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$を連続関数とし，

$$\begin{aligned} F &= \Big[E(f=\infty)\cap E(g=-\infty)\Big] + \Big[E(f=-\infty)\cap E(g=\infty)\Big], \\ G &= E(f=\infty) + E(f=-\infty) \end{aligned}$$

とおく．このとき，以下が成り立つ：

1. $f+g$は$E\setminus F$上で$\mathcal{B}$可測である；
2. fgはE上で$\mathcal{B}$可測である；
3. $\phi\circ f$は$E\setminus G$上で$\mathcal{B}$可測である．

※　規約$0\cdot\infty = \infty\cdot 0 = 0$を避ける場合は2.にも除外集合が必要となる．

※　後述の系 2.23によると，fを可積分関数に限るなら，F, Gはともに零集合となる．よってこのとき，さらに後述の注意 2.25の規約に従うなら，$f+g, \phi\circ f$はともにE上の$\mathcal{B}$可測関数として扱うことができる．

証明. 1.　$E' = E\setminus F$とおく．任意の$\alpha\in\mathbb{R}$に対し，

$$\begin{aligned} E'(f+g>\alpha) &= \Big\{x\in E';\ f(x) > \alpha - g(x)\Big\} \\ &= \Big\{x\in E';\ \exists q\in\mathbb{Q}\ \text{s.t. } f(x) > q > \alpha - g(x)\Big\} \\ &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \Big\{x\in E';\ f(x) > q > \alpha - g(x)\Big\} \\ &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \Big[E'(f>q)\cap E'(g>\alpha-q)\Big] \\ &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \Big[E(f>q)\cap E(g>\alpha-q)\Big] \end{aligned}$$

と書き直せば，$E(f+g>\alpha)\in\mathcal{B}$が従う．

2.　1.と同様に議論すると，$\alpha\geq 0$のとき

$$\begin{aligned} E(fg>\alpha) = &\bigcup_{q\in\mathbb{Q}, q>0} \Big[E(f>q)\cap E(g>\alpha/q)\Big] \\ &+ \bigcup_{q\in\mathbb{Q}, q<0} \Big[E(f<q)\cap E(g<\alpha/q)\Big] \end{aligned}$$

と書けるので，確かに$E(fg>\alpha)\in\mathcal{B}$である．$\alpha<0$のときは可測集合$E(f=\pm\infty)$を分けて議論する必要があるが，同様にして$E(fg>\alpha)\in\mathcal{B}$を示すことができる．詳細は省略する．

3.　$E'' = E\setminus G$とおく．任意の$\alpha\in\mathbb{R}$に対して，

$$E''(\phi\circ f>\alpha) = f^{-1}\Big(\phi^{-1}((\alpha,\infty))\Big)$$

と書ける．$\phi^{-1}((\alpha,\infty))\subset\mathbb{R}$は開集合であることに注意すると，命題 2.12より主張が従う．　$\square$

命題 2.14. $f_n\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$, $n=1,2,\ldots,$ を$\mathcal{B}$可測関数とする．このとき

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n, \quad \liminf_{n\to\infty} f_n$$

は$\mathcal{B}$可測関数である．特に，各点極限

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

が存在すれば，fも$\mathcal{B}$可測関数である．

※　$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$とは，各$x\in E$に対して

$$(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\}$$

で定義される関数のことである．他も同様に各点で定義する．

証明. 任意の$\alpha \in \mathbb{R}$に対し

$$E\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > \alpha\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(f_n > \alpha) \in \mathcal{B},$$
$$E\Big(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n > \alpha\Big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E(f_n > \alpha) \in \mathcal{B},$$

が成り立つので，$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$および$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$は$\mathcal{B}$可測関数である．また

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k, \quad \liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k$$

と書けるので，$\limsup_{n\to\infty} f_n$および$\liminf_{n\to\infty} f_n$も$\mathcal{B}$可測関数である． □

定義. $f\colon E \to \mathbb{R}$とする．有限個の$\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N$, と互いに素な有限個の$E_j \in \mathcal{B}$, $j = 1, \dots, N$, を用いて

$$f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{E_j}, \quad E = \sum_{j=1}^{N} E_j$$

と書けるとき，fをE上の**単関数**と呼ぶ．

※　一般に部分集合$A \subset X$に対し，その**特性関数**$\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$を

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A, \\ 0 & \text{if } x \in X \setminus A, \end{cases}$$

で定義する．単関数は明らかに$\mathcal{B}$可測関数である．

命題 2.15. $f\colon E \to [0, \infty]$を$\mathcal{B}$可測関数とする．このとき，ある単関数列$f_n\colon E \to [0, \infty]$, $n = 1, 2, \dots$, で（各点の意味で）

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \to f \quad \text{as } n \to \infty$$

を満たすものが存在する．

証明. 関数列$f_n\colon E \to \mathbb{R}$を

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n} & \text{if } x \in E\Big(\dfrac{k-1}{2^n} \leq f < \dfrac{k}{2^n}\Big) \text{ for } k = 1, \dots, 2^n n, \\ n & \text{if } x \in E(f \geq n), \end{cases}$$

で定義すると，これが実際に条件を満たす単関数列になっていることが確かめられる．詳細は省略する． □

問　上のf_nが条件を満たす単関数列になっていることを確かめよ．

○ **零集合上の関数値**

今，$(X, \mathcal{B})$上に測度μが与えられているとする．

定義. $P(x)$を$x \in E$を変数に含む命題とする．"ある零集合$N \in \mathcal{B}$が存在して任意の$x \in E \setminus N$に対して$P(x)$が成り立つ" を，"E上ほとんどいたるところで$P(x)$が成り立つ" のように言い，"$P(x)$ for a.e. $x \in E$" あるいは "P a.e. on E" などと書き表す．

命題 2.16. $(X, \mathcal{B}, \mu)$は完備であるとし，$f, g\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$とする．もし，$f$が$\mathcal{B}$可測かつ$E$上ほとんどいたるところ$f = g$なら，$g$も$\mathcal{B}$可測である．特に，$E$が零集合であれば，任意の関数$g\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$は$\mathcal{B}$可測である．

証明. ある零集合$N \in E$で，$E \setminus N$上で$f = g$となるものをとる．このとき，任意の$\alpha \in \mathbb{R}$に対して

$$E(g > \alpha) = [E(f > \alpha) \setminus N] \cup [E(g > \alpha) \cap N] \in \mathcal{B}$$

なので，確かにgは$\mathcal{B}$可測である． □

注意. 命題 2.16により，$(X, \mathcal{B}, \mu)$が完備な場合，関数の値を零集合上で任意に変更しても，その可測性には影響がないことが分かる．（そしてさらに，注意 2.25に後述するように，可積分性や積分値にも影響がない．）よって測度空間に常に予め完備化を要求しておくことにすれば，零集合は“無視する”ことができる．なお本講義では，記述を簡単にするため，注意 2.25で述べるような，完備化の要求よりも実質上さらに強い規約を採用する．

§ 2.6 積分の定義

この小節では常に，$(X, \mathcal{B}, \mu)$を測度空間とし，$E \in \mathcal{B}$とする．$\mathcal{B}$可測関数$f \colon E \to \overline{\mathbb{C}}$に対して，その$E$上での**Lebesgue積分**$\displaystyle\int_E f \, \mathrm{d}\mu$を以下の手順で定義する．

○ 非負値単関数のとき

任意の非負値単関数$f = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{E_j}$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, N$, に対して，

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mu(E_j) \in [0, \infty]$$

と定義する．（※ 規約$0 \cdot \infty = 0$に注意せよ．この規約を利用しない場合は$\alpha_j = 0$かつ$\mu(E_j) = \infty$となるjを上式の右辺から除いておく必要がある．）

補題 2.17. 上の$\displaystyle\int_E f \, \mathrm{d}\mu$の値は$f$の表示によらず，well-definedである．

証明. $\alpha_j, \beta_k \geq 0$および$E_j, F_k \in \mathcal{B}$を用いて，

$$f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{E_j} = \sum_{k=1}^{M} \beta_k \chi_{F_k}, \quad E = \sum_{j=1}^{N} E_j = \sum_{k=1}^{M} F_k$$

と書けたとする．このとき，

$$E_j = \sum_{k=1}^{M} (E_j \cap F_k), \quad F_k = \sum_{j=1}^{N} (F_k \cap E_j)$$

および

$$\alpha_j = \beta_k \quad \text{for } j, k \text{ with } E_j \cap F_k \neq \emptyset$$

が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mu(E_j) &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \alpha_j \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \beta_k \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{k=1}^{M} \beta_k \mu(F_k)\end{aligned}$$

が得られる． □

補題 2.18. 1. f, gをE上の非負値単関数とし，$\alpha, \beta \geq 0$とする．このとき，$\alpha f + \beta g$もE上の非負値単関数であり，

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\,\mathsf{d}\mu = \alpha \int_E f\,\mathsf{d}\mu + \beta \int_E g\,\mathsf{d}\mu.$$

2. fをE上の非負値単関数とし，$E = F + G$, $F, G \in \mathcal{B}$, とする．このとき，$f|_F$, $f|_G$はそれぞれF, G上の非負値単関数であり，

$$\int_E f\,\mathsf{d}\mu = \int_F f|_F\,\mathsf{d}\mu + \int_G f|_G\,\mathsf{d}\mu.$$

3. f, gをE上の非負値単関数とし，$f \leq g$とする．このとき，

$$\int_E f\,\mathsf{d}\mu \leq \int_E g\,\mathsf{d}\mu.$$

※　以下，$\int_F f|_F\,\mathsf{d}\mu$などは，単に$\int_F f\,\mathsf{d}\mu$などと書くこともある．

証明. 1.　$\alpha_j, \beta_k \geq 0$および互いに素な$E_j, F_k \in \mathcal{B}$を用いて，

$$f = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{E_j}, \quad g = \sum_{k=1}^M \beta_k \chi_{F_k}, \quad E = \sum_{j=1}^N E_j = \sum_{k=1}^M F_k$$

とすると，

$$\alpha f + \beta g = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M (\alpha\alpha_j + \beta\beta_k)\chi_{E_j \cap F_k}$$

かつ

$$E = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M E_j \cap F_k$$

と書けるので，$\alpha f + \beta g$も単関数である．さらに

$$\begin{aligned}\int_E (\alpha f + \beta g)\,\mathsf{d}\mu &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M (\alpha\alpha_j + \beta\beta_k)\mu(E_j \cap F_k)\\ &= \alpha \sum_{j=1}^N \alpha_j \mu(E_j) + \beta \sum_{k=1}^M \beta_k \mu(F_k)\\ &= \alpha \int_E f\,\mathsf{d}\mu + \beta \int_E g\,\mathsf{d}\mu\end{aligned}$$

を得る．

2.　$\alpha_j \geq 0$および$E_j \in \mathcal{B}$を用いて，

$$f = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{E_j}, \quad E = \sum_{j=1}^N E_j$$

とすると，

$$f|_F = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{E_j \cap F}, \quad f|_G = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{E_j \cap G}$$

なので，$f|_F$, $f|_G$はそれぞれF, G上の単関数である．さらに

$$\begin{aligned}\int_E f\,\mathsf{d}\mu = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mu(E_j) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \mu(E_j \cap F) + \sum_{j=1}^N \alpha_j \mu(E_j \cap G)\\ &= \int_F f|_F\,\mathsf{d}\mu + \int_G f|_G\,\mathsf{d}\mu\end{aligned}$$

が成り立つ．

3.　1. と同様にして$g - f$は非負値単関数であることが示せる．すると

$$\int_E g\,\mathsf{d}\mu = \int_E f\,\mathsf{d}\mu + \int_E (g - f)\,\mathsf{d}\mu \geq \int_E f\,\mathsf{d}\mu$$

を得る．　□

○ **非負値可測関数のとき**

$f\colon E \to [0,\infty]$ を $\mathcal{B}$ 可測関数とする．このとき，命題 2.15 により，単関数列 $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ で

$$0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_n \to f \quad \text{as } n \to \infty$$

を満たすものが存在する．これを用いて

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \in [0,\infty]$$

と定義する．

※ $\displaystyle\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu$ は n に関して単調非減少なので，上の極限は必ず存在する．

補題 2.19. 上の $\displaystyle\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ の値は f_n の選び方によらず，well-defined である．

証明. f_n とともに単関数列 $g_n\colon E \to \mathbb{R}$ も

$$0 \le g_1 \le g_2 \le \cdots \le g_n \to f \quad \text{as } n \to \infty$$

を満たすとする．任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \ge \int_E g_m \, \mathrm{d}\mu$$

が成り立つことを示せばよい．さらに，$F = E \setminus E(g_m = 0)$ とおいて，

$$\lim_{n\to\infty} \int_F f_n \, \mathrm{d}\mu \ge \int_F g_m \, \mathrm{d}\mu \tag{$\spadesuit$}$$

を示せば十分である．

今，$\epsilon > 0$ を十分小さくとって

$$\min_{x\in F} g_m(x) - \epsilon > 0$$

とする．また，$F_n = F(f_n > g_m - \epsilon)$ とおくと

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots, \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F$$

である．もし，$\mu(F) = \infty$ なら

$$\int_F f_n \, \mathrm{d}\mu \ge \int_{F_n} f_n \ge \int_{F_n} (g_m - \epsilon) \, \mathrm{d}\mu \ge \Bigl(\min_{x\in F} g_m(x) - \epsilon\Bigr)\mu(F_n)$$

において $n \to \infty$ とすれば，($\spadesuit$) が従う．

また，$\mu(F) < \infty$ ならば，

$$\begin{aligned}
\int_F f_n \, \mathrm{d}\mu &\ge \int_{F_n} f_n \, \mathrm{d}\mu \\
&\ge \int_{F_n} (g_m - \epsilon) \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_F g_m \, \mathrm{d}\mu - \int_{F\setminus F_n} g_m \, \mathrm{d}\mu - \epsilon\mu(F_n) \\
&\ge \int_F g_m \, \mathrm{d}\mu - \Bigl(\sup_{x\in F} g_m(x)\Bigr)\Bigl(\mu(F) - \mu(F_n)\Bigr) - \epsilon\mu(F_n)
\end{aligned}$$

であり，ここで $n \to \infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} \int_F f_n \, \mathrm{d}\mu \ge \int_F g_m \, \mathrm{d}\mu - \epsilon\mu(F)$$

となる．$\epsilon > 0$ は任意に小さく取れるので，やはり ($\spadesuit$) が得られる． □

補題 2.20. 1. $f, g\colon E \to [0,\infty]$ を $\mathcal{B}$ 可測関数とし，$\alpha, \beta \geq 0$ とする．このとき，$\alpha f + \beta g\colon E \to [0,\infty]$ も $\mathcal{B}$ 可測関数であり，

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

2. $f\colon E \to [0,\infty]$ を $\mathcal{B}$ 可測関数とし，$E = F + G$, $F, G \in \mathcal{B}$, とする．このとき，$f|_F\colon F \to [0,\infty]$, $f|_G\colon G \to [0,\infty]$ はともに $\mathcal{B}$ 可測関数であり，

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_F f|_F\,\mathrm{d}\mu + \int_G f|_G\,\mathrm{d}\mu.$$

3. $f, g\colon E \to [0,\infty]$ を $\mathcal{B}$ 可測関数とし，$f \leq g$ とする．このとき，

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

証明. 1.　f_n, g_n をそれぞれ f, g の単調単関数近似列とすると，$\alpha f_n + \beta g_n$ は $\alpha f + \beta g$ の単調単関数近似列となる．すると

$$\begin{aligned}\int_E (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_E (\alpha f_n + \beta g_n)\,\mathrm{d}\mu \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu + \beta \lim_{n\to\infty} \int_E g_n\,\mathrm{d}\mu \\ &= \alpha \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_E g\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

が成り立つ．

2.　定義により，非負値単関数の場合（補題 2.18）に帰着する．詳細は省略する．

3.　$F = E(f < \infty)$，$G = E(f = \infty)$ とする．F 上では $g = f + (g - f)$ と書いて，1. を用いると

$$\int_F f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_F f\,\mathrm{d}\mu + \int_F (g - f)\,\mathrm{d}\mu = \int_F g\,\mathrm{d}\mu$$

が得られる．G 上では $f = g = \infty$ なので，

$$\int_G f\,\mathrm{d}\mu = \int_G g\,\mathrm{d}\mu$$

である．あとは上の2式の辺々を加えて，2. の結果を用いればよい．　□

○ **一般のとき**

$f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$ 可測関数とする．分解

$$f = f_+ - f_-, \quad f_\pm(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$$

において

$$\int_E f_+\,\mathrm{d}\mu < \infty \quad \text{または} \quad \int_E f_-\,\mathrm{d}\mu < \infty$$

が成り立つとき，f は μ **積分確定**であると言い，

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E f_+\,\mathrm{d}\mu - \int_E f_-\,\mathrm{d}\mu \in \overline{\mathbb{R}}$$

と定義する．

特に
$$\int_E f_\pm \, \mathrm{d}\mu < \infty$$
が成り立つとき，f は μ **可積分**であると言う．このとき，
$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E f_- \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$$
であることに注意する．

また，$f\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$ を $\mathcal{B}$ 可測関数とする．$\mathrm{Re}\, f$ および $\mathrm{Im}\, f$ がともに μ 積分確定であるとき，f は μ **積分確定**であるといい，
$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E \mathrm{Re}\, f \, \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_E \mathrm{Im}\, f \, \mathrm{d}\mu \in \overline{\mathbb{C}}$$
と定義する．特に，$\mathrm{Re}\, f$ および $\mathrm{Im}\, f$ がともに μ 可積分であるとき，f は μ **可積分**であると言う．

§ 2.7 可積分関数の性質

補題 2.21. $f\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$ を $\mathcal{B}$ 可測関数とする．f が μ 可積分であるためには
$$\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$$
が必要十分である．

証明. 不等式
$$(\mathrm{Re}\, f)_\pm, (\mathrm{Im}\, f)_\pm \le |f| \le (\mathrm{Re}\, f)_+ + (\mathrm{Re}\, f)_- + (\mathrm{Im}\, f)_+ + (\mathrm{Im}\, f)_-$$
と補題 2.20 の 3. および μ 可積分性の定義から分かる． □

※ $|f|$ は非負値なので，常に μ 積分確定であることに注意する．

命題 2.22（Chebyshev の不等式）. $f\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$ を $\mathcal{B}$ 可測関数とする．このとき，任意の $\alpha > 0$ に対して
$$\mu\bigl(E(|f| > \alpha)\bigr) \le \frac{1}{\alpha} \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$$
が成り立つ．

証明. 以下のように直接計算できる：
$$\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu \ge \int_{E(|f|>\alpha)} |f| \, \mathrm{d}\mu \ge \int_{E(|f|>\alpha)} \alpha \, \mathrm{d}\mu \ge \alpha\mu\bigl(E(|f| > \alpha)\bigr).$$
□

系 2.23. $f\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$ を $\mathcal{B}$ 可測関数とする．

1. $\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ ならば，
$$|f| < \infty \quad \text{a.e. on } E$$
である．
2. $\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu = 0$ であるためには
$$f = 0 \quad \text{a.e. on } E$$
が必要十分条件である．

証明． 1.　Chebyshevの不等式より，任意の$\alpha > 0$に対して

$$\mu(E(|f| > \alpha)) \le \frac{1}{\alpha}\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty$$

であることに注意する．すると

$$\mu\Big(E(|f| = \infty)\Big) = \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E(|f| > n)\Big) = \lim_{n\to\infty}\mu\Big(E(|f| > n)\Big) = 0$$

を得る．

2.　$\displaystyle\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu = 0$とすると，Chebyshevの不等式より，

$$\mu\Big(E(|f| > 0)\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(|f| > 1/n)\Big) = \lim_{n\to\infty}\mu\Big(E(|f| > 1/n)\Big) = 0$$

である．逆は定義より明らかである．　□

※　Chebyshevの不等式を用いずに定義から直接証明することもできる．

系 2.24. $f, g\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$を$\mathcal{B}$可測関数とし，$f = g$ a.e. on Eとする．もしfがμ積分確定であれば，gもμ積分確定であり，

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E g\,\mathrm{d}\mu$$

が成り立つ．特に，もしfがμ可積分であれば，gもμ可積分である．

※　命題 2.16によれば，$(X, \mathcal{B}, \mu)$が完備なときはgに$\mathcal{B}$可測性を仮定しなくてもよい．このように，測度空間の完備性の有無に応じて，定理の主張にヴァリエーションが生じることがしばしばある．

注意 2.25. この系により，2つの可測関数の零集合上での振る舞いの違いは，可積分性や積分値には影響しないことがわかる．より一般に，以降では，関数fが積分領域Eのすべての点で定義されていなくても，ある零集合Nを除いた$E \setminus N$上で定義されてさえいれば，N上での値を予め適当に（例えば0に）定義し直しておくことで，fの積分を議論してよいことにする．この規約を導入することで以下の定理の主張がやや簡潔になる．なおこの規約は，定義されていない点があってもよい分，常に完備性や完備化を要求するよりも真に強い規約である．

証明． $f, g\colon E \to [0, \infty]$が$\mathcal{B}$可測関数で，$f = g$ a.e. on Eであるなら，

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E g\,\mathrm{d}\mu$$

となることを示せば十分である．しかしこれは以下のように計算できる：

$$\begin{aligned}\int_E f\,\mathrm{d}\mu &= \int_{E(f=g)} f\,\mathrm{d}\mu + \int_{E(f\ne g)} f\,\mathrm{d}\mu\\ &= \int_{E(f=g)} g\,\mathrm{d}\mu\\ &= \int_{E(f=g)} g\,\mathrm{d}\mu + \int_{E(f\ne g)} g\,\mathrm{d}\mu\\ &= \int_E g\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

よって主張は示された．　□

命題 2.26. 1. $f, g\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$ を μ 可積分関数とし，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ とする．このとき，$\alpha f + \beta g$ は μ 可積分であり，

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_E g\,\mathrm{d}\mu$$

が成り立つ．

2. $f\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$ を $\mathcal{B}$ 可測関数とし，$E = F + G$, $F, G \in \mathcal{B}$, とする．f が μ 可積分であるためには $f|_F$, $f|_G$ がそれぞれ F, G 上で μ 可積分となることが必要十分である．さらにこのとき

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_F f|_F\,\mathrm{d}\mu + \int_G f|_G\,\mathrm{d}\mu$$

が成り立つ．

注意. 1. の $\alpha f + \beta g$ は，その値に $\infty - \infty$ 等が現れ得るため，必ずしも E 上すべての点では定義されていない．しかし仮定と系 2.23 によれば，定義域から除外される集合は零集合であり，注意 2.25 の規約の下で 1. の主張は意味を持つ．もしこの規約を避けるのなら，1. は以下のような形になる：

$1'$. $f, g\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$ は μ 可積分とし，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ とする．$h\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$ は $\mathcal{B}$ 可測で

$$h = \alpha f + \beta g \quad \text{a.e. on } E$$

とする．このとき，h は μ 可積分であり，

$$\int_E h\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_E g\,\mathrm{d}\mu$$

が成り立つ．

なお $1'$. において，$(X, \mathcal{B}, \mu)$ が完備なら h に $\mathcal{B}$ 可測性を仮定する必要はない．

上の注意は実用上においてはそれほど気にする必要はない（と思われる）．同様の注意が必要なる個所が以降もたびたび現れるが，必ずしも触れない．

証明. 2.　$\overline{\mathbb{R}}$ 値の場合のみを考える．非負値の場合の結果から

$$\int_E f_\pm\,\mathrm{d}\mu = \int_F f_\pm|_F\,\mathrm{d}\mu + \int_G f_\pm|_G\,\mathrm{d}\mu$$

なので，f が μ 可積分であることと $f|_F$ および $f|_G$ が μ 可積分であることは同値である．また，このとき

$$\begin{aligned}\int_E f\,\mathrm{d}\mu &= \int_F f_+|_F\,\mathrm{d}\mu + \int_G f_+|_G\,\mathrm{d}\mu - \int_F f_-|_F\,\mathrm{d}\mu - \int_G f_-|_G\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_F f|_F\,\mathrm{d}\mu + \int_G f|_G\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

である．

1.　実数倍および純虚数倍については明らかであり，和 $f + g$ について考えればよい．さらに f, g が $\mathbb{R}$ 値の場合のみ考えれば十分である．このとき，

$$\begin{aligned}E_{++} &= E(f \geq 0, g \geq 0), \quad & E_{+-} &= E(f \geq 0, g < 0), \\ E_{-+} &= E(f < 0, g \geq 0), \quad & E_{--} &= E(f < 0, g < 0)\end{aligned}$$

とおく．2. の結果により，各 E_{**} 上で $f + g$ が μ 可積分であることを示せばよい．$E_{\pm\pm}$ 上での μ 可積分性は明らかなので，$E_{\pm\mp}$ 上の場合を考えればよい．ここでは E_{+-} 上のみを考える．

$$F = E_{+-}(f + g \geq 0), \quad G = E_{+-}(f + g < 0)$$

とおく．まず

$$\int_F f\,\mathrm{d}\mu = \int_F (f + g)\,\mathrm{d}\mu + \int_F (-g)\,\mathrm{d}\mu$$

なので，

$$\int_{E_{+-}} (f + g)_+\,\mathrm{d}\mu = \int_F f\,\mathrm{d}\mu + \int_F g\,\mathrm{d}\mu < \infty$$

である．同様にして

$$\int_{E_{+-}} (f + g)_-\,\mathrm{d}\mu = -\int_G f\,\mathrm{d}\mu - \int_G g\,\mathrm{d}\mu < \infty$$

が得られ，よって $f + g$ は μ 可積分である．主張の等号も明らかである．　□

命題 2.27. $f\colon E\to\overline{\mathbb{C}}$が$\mu$可積分であるなら

$$\left|\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_E |f|\,\mathrm{d}\mu$$

が成り立つ．

証明. 以下，任意の$\alpha\in\mathbb{C}$に対し，$\operatorname{sgn}\alpha = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha=0, \\ \alpha/|\alpha| & \text{if } \alpha\neq 0, \end{cases}$ と書くことにする．$I=\int_E f\,\mathrm{d}\mu$とおく．$|f|<\infty$ a.e. on Eに注意して，

$$\begin{aligned}\left|\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right| &= \mathrm{Re}\left|\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right| = \mathrm{Re}\left[(\bar{I}/|I|)\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[\int_E \overline{(\operatorname{sgn} I)}(\operatorname{sgn} f)|f|\,\mathrm{d}\mu\right] \\ &\le \int_E \mathrm{Re}\left[\overline{(\operatorname{sgn} I)}(\operatorname{sgn} f)|f|\right]\mathrm{d}\mu \le \int_E |f|\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

を得る（計算の途中で注意 2.25の規約を用いた）． □

§ 2.8 収束定理

この小節では，$(X,\mathcal{B},\mu)$を測度空間とし，$E\in\mathcal{B}$とする．また，$f_n\colon E\to\overline{\mathbb{C}}$, $n=1,2,\ldots,$ を$\mathcal{B}$可測関数列とする．

定理 2.28 (単調収束定理). E上ほとんどいたるところ

$$0\le f_1\le f_2\le\cdots\le f_n\le\cdots$$

が成り立つとすると，

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu$$

が成り立つ．

※ $\lim_{n\to\infty} f_n$がμ可積分でなくても，∞を含めて等式が成立する．

※ 等式の右辺で注意 2.25の規約を用いた．以降，当面はこの種の注意には触れない．

証明. $f=\lim_{n\to\infty} f_n$とおく．単関数列$f_{nk}\colon E\to\mathbb{R}$を

$$f_{nk}(x)=\begin{cases}\dfrac{l-1}{2^k} & \text{if } x\in E\left(\dfrac{l-1}{2^k}\le f_n<\dfrac{l}{2^k}\right) \text{ for } l=1,\ldots,2^k k, \\ k & \text{if } x\in E(f_n\ge k).\end{cases}$$

で定義する．まず任意のnに対して，

$$\int_E f_{nn}\,\mathrm{d}\mu \le \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu \le \int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

である．一方，f_{nn}はE上ほとんどいたるところ

$$0\le f_{11}\le f_{22}\le\cdots\le f_{nn}\to f \quad \text{as } n\to\infty$$

を満たすので，非負値可測関数に対する積分の定義から

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_{nn}\,\mathrm{d}\mu \le \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu \le \int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

を得る． □

系 2.29. 任意の$n=1,2,\ldots,$ に対し，E上ほとんどいたるところ$f_n\ge 0$とする．このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_E\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)\mathrm{d}\mu$$

が成り立つ．

証明. $F_N=\sum_{n=1}^{N} f_n$とおく．単調収束定理により

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty}\int_E F_N\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_E \lim_{N\to\infty} F_N\,\mathrm{d}\mu = \int_E\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

を得る． □

定理 2.30（Fatouの補題）. 任意の$n = 1, 2, \ldots,$ に対し，E上ほとんどいたるところ$f_n \geq 0$とする．このとき，

$$\int_E \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu$$

が成り立つ．

証明. 不等式

$$\int_E \inf_{n\geq k} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \inf_{n\geq k} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu$$

が成り立つことに注意する．単調収束定理より

$$\int_E \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E \inf_{n\geq k} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu$$

を得る． □

定理 2.31（Lebesgue収束定理）. E上ほとんどいたるところで極限

$$\lim_{n\to\infty} f_n$$

が存在するとする．さらにあるμ可積分関数$g\colon E \to [0, \infty]$が存在して，任意の$n = 1, 2, \ldots$に対して

$$|f_n| \leq g \quad \text{a.e. on } E$$

が成り立つとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu$$

が成り立つ．

※　離散パラメータに関する極限$n \to \infty$を連続パラメータに関する極限$t \to a \in \overline{\mathbb{R}}$に変更しても同様の主張が成り立つ．実際，任意の点列$t_n \to a$をとれば，離散パラメータの場合に帰着される．定理 2.34の証明も参照せよ．

証明. $\mathbb{R}$値の場合のみ考える．$g \pm f_n \geq 0$なので，Fatouの補題により

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} (g \pm f_n) \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E (g \pm f_n) \, \mathrm{d}\mu$$

が成り立つ．仮定から$\lim_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$および$g$は$\mu$可積分なので，

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu$$

および

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu$$

が成り立つ．よって主張は示された． □

補足　Lebesgue収束定理は，極限と積分の順序交換のための簡単な十分条件を与えてくる有用な定理であるが，**優関数**gが結論の式に現れないためか，その役割がいま一つ分かりづらい．そこで，例えば次のような2つの関数列$f_{j,n}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$を考えてみよう：

$$f_{1,n} = n\chi_{(0,1/n]}, \qquad f_{2,n} = \chi_{(n,n+1]}.$$

これらはともに

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_{j,n} \, \mathrm{d}x = 1, \qquad \int_E \lim_{n\to\infty} f_{j,n} \, \mathrm{d}x = 0$$

を満たし，極限と積分が交換できない例となっているが，その「原因」は異なる．グラフを描けば明らかなように，$n \to \infty$のとき，$f_{1,n}$は面積を一点に集中させることで面積1を保つが，$f_{2,n}$は面積を空間遠方に逃がすことで面積1を保っている．これらは可積分な優関数で一様に上下から抑え込むことはできない．逆に考えると，Lebesgue収束定理において，優関数gは関数列の面積を特異性として逃がしたり，空間遠方に逃がしたりする可能性を排除している，と解釈することができるだろう．

系 2.32 (有界収束定理). E 上ほとんどいたるところで極限

$$\lim_{n\to\infty} f_n$$

が存在するとする．さらに $\mu(E) < \infty$ かつある $M > 0$ が存在して任意の $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$|f_n| \le M \quad \text{a.e. on } E$$

が成り立つとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu$$

が成り立つ.

証明. Lebesgue 収束定理において $g = M$ とすればよい. □

定理 2.33. もし

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

ならば，E 上ほとんどいたるところで有限な $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が存在して，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu$$

が成り立つ.

証明. 単調収束定理より

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

なので，和 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ は E 上ほとんどいたるところ有限である．よって E 上ほとんどいたるところで $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は収束する．あとは $g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ を優関数として Lebesgue 収束定理を用いればよい. □

定理 2.34 (微分と積分の順序交換). $I \subset \mathbb{R}$ を開区間とし，$f\colon I \times E \to \overline{\mathbb{C}}$ とする．任意の $t \in I$ に対し $f(t, \cdot)$ は μ 可積分，ほとんどすべての $x \in E$ に対し $f(\cdot, x)$ は I 上で微分可能とする．さらにある μ 可積分関数 $g\colon E \to [0, \infty]$ が存在して，任意の $t \in I$ に対して

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot) \right| \le g \quad \text{a.e. on } E \tag{$\spadesuit$}$$

が成り立つとする．このとき $\int_E f(t, \cdot) \, \mathrm{d}\mu$ は $t \in I$ について微分可能であり，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_E f(t, \cdot) \, \mathrm{d}\mu = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot) \, \mathrm{d}\mu$$

が成り立つ.

※　($\spadesuit$) における除外零集合は $t \in I$ に依存してよい.

証明． fが$\mathbb{R}$値の場合に示せば十分である．$a \in I$を任意に固定して，点列$\{t_n\} \subset I \setminus \{a\}$を$t_n \to a$ととる．すると，次のような零集合$N \subset E$が存在する：任意の$x \in E \setminus N$と任意の$n$に対し，ある$\theta = \theta_{x,n} \in (0,1)$が存在して

$$\left|\frac{f(t_n,x)-f(a,x)}{t_n-a}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(a+\theta(t_n-a),x)\right| \le g(x)$$

が成り立つ．よってLebesgue収束定理により

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{f(t_n,\cdot)-f(a,\cdot)}{t_n-a}\,\mathrm{d}\mu = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(a,\cdot)\,\mathrm{d}\mu$$

を得る． □

§ 2.9 Riemann積分との関係

1次元Lebesgue測度空間$(\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{R}),\mu)$上のLebesgue積分をRiemann積分と比較する．多次元への拡張は容易である．

定理 2.35. $[a,b] \subset \mathbb{R}$を有界閉区間とし，$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$をRiemann可積分とする．このとき，$f$はLebesgue可測かつLebesgue可積分であり，Riemann積分の値とLebesgue積分の値は一致する．

※ Dirichletの関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{for } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

は$[0,1]$上でRiemann可積分ではないが，Lebesgue可測かつLebesgue可積分であり，Lebesgue積分の値は0である．

証明． $\Delta_n = \{x_0,\dots,x_{2^n}\}$を区間$[a,b]$の$2^n$等分分割とし，関数$\phi_n, \Phi_n$を

$$\phi_n = f(x_0)\chi_{\{x_0\}} + \sum_{j=1}^{2^n}\left[\inf_{(x_{j-1},x_j]} f\right]\chi_{(x_{j-1},x_j]},$$

$$\Phi_n = f(x_0)\chi_{\{x_0\}} + \sum_{j=1}^{2^n}\left[\sup_{(x_{j-1},x_j]} f\right]\chi_{(x_{j-1},x_j]}$$

で定める．ϕ_n, Φ_nの定め方と$\Delta_1 \subset \cdots \subset \Delta_n \subset \cdots$により

$$\inf_{[a,b]} f \le \phi_1 \le \cdots \le \phi_n \le f \le \Phi_n \le \cdots \le \Phi_1 \le \sup_{[a,b]} f$$

が成り立つことに注意する．まずϕ_n, Φ_nの単調性より，各点極限

$$\phi = \lim_{n\to\infty}\phi_n, \quad \Phi = \lim_{n\to\infty}\Phi_n; \quad \phi \le f \le \Phi \tag{$\diamondsuit$}$$

の存在が分かる．一方，有界収束定理，単関数に対するLebesgue積分の定義およびfのRiemann可積分性により

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}(\Phi-\phi)\,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\Phi_n\,\mathrm{d}\mu - \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\phi_n\,\mathrm{d}\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} S(f;\Delta_n) - \lim_{n\to\infty} s(f;\Delta_n) \\ &= 0\end{aligned} \tag{$\clubsuit$}$$

である．($\diamondsuit$)，($\clubsuit$)より

$$\phi = \Phi = f \quad \text{a.e. on } [a,b]$$

であり，したがって，Lebesgue測度空間の完備性から，fのLebesgue可測性およびLebesgue可積分性が従う．

fのRiemann積分値とLebesgue積分値が一致することも上の議論から分かる． □

系 2.36. $-\infty \le a < b \le \infty$ とし，$f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ は (a,b) 内の任意の有界閉区間上で Riemann 可積分かつ (a,b) 上で広義絶対 Riemann 可積分とする．このとき，f は (a,b) 上で Lebesgue 可測かつ Lebesgue 可積分であり，広義 Riemann 積分値と Lebesgue 積分値は一致する．

証明. $(a,b) = \mathbb{R}$ の場合のみ示す．$\chi_{[-n,n]}f$ は Lebesgue 可測で $n \to \infty$ のとき $\chi_{[-n,n]}f \to f$ なので，f は Lebesgue 可測である．単調収束定理より

$$\int_{\mathbb{R}} |f|\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-n,n]}|f|\,\mathrm{d}\mu < \infty$$

なので，f は Lebesgue 可積分である．また，$|f|$ を優関数として Lebesgue 収束定理を適用すれば，

$$\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-n,n]}f\,\mathrm{d}\mu$$

が成り立つので，2つの積分値が一致することも分かる． □

問　$\mathbb{R}$ 上で広義 Riemann 可積分だが Lebesgue 可積分でない関数の例を挙げよ．

略解. 次のような関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考えればよい：

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1}\sin x & x \neq 0 \text{ のとき}, \\ 1 & x = 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

実際，部分積分により，f は $\mathbb{R}$ 上広義 Riemann 可積分であることが確かめられるが，一方で，

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\pm}\,\mathrm{d}\mu = \infty$$

であり，f は μ 積分確定ですらない． □

※　広義 Riemann 積分は，特殊な順序で f_+ と $-f_-$ の面積の総和をとるため，たまたま正負の面積が相殺して，和が収束してしまうと言える．

第3章 Lebesgue測度の構成

§ 3.1 前測度空間

定義. 部分集合族 $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ が X 上の**集合半代数**であるとは，以下の条件を満たすことである：

1. $\emptyset, X \in \mathcal{I}$；
2. 任意の $I \in \mathcal{I}$ に対しある有限個の互いに素な $J_1, \dots, J_n \in \mathcal{I}$ が存在して
$$I^c = \sum_{j=1}^{n} J_j;$$
3. 任意の $I, J \in \mathcal{I}$ に対し $I \cap J \in \mathcal{I}$.

例. 任意の完全加法族は集合半代数である．

問. 任意の $I, J \in \mathcal{I}$ に対し，$I \cup J$ および $I \setminus J$ は互いに素な $\mathcal{I}$ の元の有限和で書けることを示せ.（※　これから特に，$\mathcal{I}$ の元から有限回の集合演算で得られる集合は，互いに素な $\mathcal{I}$ の元の有限和で書けることがわかる.）

定義. $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ を集合半代数とする．関数 $m \colon \mathcal{I} \to [0,\infty]$ が

1. $m(\emptyset) = 0$,
2. 任意の互いに素な $I_j \in \mathcal{I}$, $j = 1, 2, \ldots,$ に対して

$$I := \sum_{j=1}^{\infty} I_j \in \mathcal{I} \quad \Rightarrow \quad m(I) = \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) \quad (\textbf{完全加法性}),$$

を満たすとき，m を $\mathcal{I}$ 上の**前測度**と呼び，組 $(X, \mathcal{I}, m)$ を**前測度空間**と呼ぶ．

例. 任意の測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は前測度空間である．

補題 3.1. $\mathcal{I}$ は X 上の集合半代数とし，関数 $m \colon \mathcal{I} \to [0,\infty]$ は以下を満たすとする：任意の互いに素な有限個の $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{I}$ に対して

$$I := \sum_{j=1}^{n} I_j \in \mathcal{I} \quad \Rightarrow \quad m(I) = \sum_{j=1}^{n} m(I_j) \quad (\textbf{有限加法性})$$

が成り立つ．このとき，任意の $I_j, I \in \mathcal{I}$, $j = 1, 2, \ldots,$ に対し，I_j が互いに素かつすべての $j = 1, 2, \ldots$ に対し $I_j \subset I$ なら，

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) \le m(I)$$

が成り立つ．

証明. 任意の $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\sum_{j=1}^{n} m(I_j) \le m(I)$$

が成り立つことを示せばよい．実際このとき，集合半代数の定義より，ある互いに素な $J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{I}$ が存在して，

$$I \setminus \sum_{j=1}^{n} I_j = \sum_{l=1}^{k} J_l \quad \therefore \; I = \sum_{j=1}^{n} I_j + \sum_{l=1}^{k} J_l$$

と書ける．すると m の有限加法性より

$$m(I) = \sum_{j=1}^{n} m(I_j) + \sum_{l=1}^{k} m(J_l) \ge \sum_{j=1}^{n} m(I_j)$$

が従う． $\square$

○ **集合半代数と前測度の具体例**

例 2.4 の記号を思い出しておく：本講義では $\mathbb{R}^d$ の半開区間全体の集合を

$$\mathcal{I}(\mathbb{R}^d) = \left\{ (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d;\ -\infty \le a_j \le b_j \le \infty \right\}$$

で表す．また，$I = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$m(I) = (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_d - a_d) \in [0, \infty]$$

と定める．

命題 3.2. 上で定まる $(\mathbb{R}^d, \mathcal{I}(\mathbb{R}^d), m)$ は前測度空間となる．

証明. $\mathcal{I}(\mathbb{R}^d)$ が集合半代数となることの証明は易しいので省略する．厳密には d に関する帰納法を用いればよい．以下では，m が前測度となることを示す．定義からすぐに $m(\emptyset) = 0$ が従うことに注意する．

Step 1.　まず $d=1$ のときに，m の有限加法性を示す．有限個の互いに素な $I_j=(a_j,b_j]\in\mathcal{I}(\mathbb{R})$, $j=1,\dots,n$, が

$$I:=(a,b]=(a_1,b_1]+\cdots+(a_n,b_n]\in\mathcal{I}(\mathbb{R})$$

を満たしているとする．このとき，I_j を a_j の小さい順に並べ替えることで

$$a=a_1\le b_1=a_2\le b_2=\cdots=a_n\le b_n=b$$

とできる．すると

$$m(I)=b-a=\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)=\sum_{j=1}^{n}m(I_j)$$

が従う．

Step 2.　次に $d=1$ として，可算個の互いに素な $I_j\in\mathcal{I}(\mathbb{R})$ が

$$I:=\sum_{j=1}^{\infty}I_j\in\mathcal{I}(\mathbb{R})$$

を満たしているとする．このとき，Step 1. の結果および補題 3.1 により

$$\sum_{j=1}^{\infty}m(I_j)\le m(I)$$

が従うので，逆向きの不等式を示せばよい．さらに以下の場合分けを行う：

(i)　まず I を有界とする．このとき，任意の $\epsilon>0$ に対して $J,J_j\in\mathcal{I}(\mathbb{R})$ を

$$\overline{J}\subset I,\quad m(I)-\epsilon<m(J);\qquad I_j\subset J_j^\circ,\quad m(J_j)<m(I_j)+2^{-j}\epsilon$$

のようにとる．ここで，$^{-}$ および $^{\circ}$ はそれぞれ閉包および内部を表すとする．するとこのとき，

$$\overline{J}\subset I=\sum_{j=1}^{\infty}I_j\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}J_j^\circ$$

なので，$\overline{J}$ のコンパクト性からある $n\in\mathbb{N}$ が存在して

$$J\subset\overline{J}\subset\bigcup_{j=1}^{n}J_j^\circ\subset\bigcup_{j=1}^{n}J_j$$

が成り立つ．互いに素な $K_{jk}\in\mathcal{I}(\mathbb{R})$, $j=1,\dots,n$, $k=1,\dots,l_j$, を

$$J_1\cap J=K_{11},\qquad (J_j\cap J)\setminus\bigcup_{k=1}^{j-1}(J_k\cap J)=\sum_{k=1}^{l_j}K_{jk}\quad\text{for } j\ge 2$$

のようにとると，

$$J=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l_j}K_{jk},\qquad \sum_{k=1}^{l_j}K_{jk}\subset J_j$$

であり，m の有限加法性と補題 3.1 より，

$$m(J)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l_j}m(K_{jk})\le\sum_{j=1}^{n}m(J_j)\le\sum_{j=1}^{\infty}m(J_j)$$

が分かる．したがって，$J,J_j\in\mathcal{I}(\mathbb{R})$ の取り方から

$$m(I)-\epsilon\le\sum_{j=1}^{\infty}m(I_j)+\epsilon$$

となるが，$\epsilon>0$ は任意であったことから，主張が従うことがわかる．

(ii)　次にIを非有界，すなわち$m(I) = \infty$とする．任意の$M > 0$に対し

$$J = I \cap (-M, M] \in \mathcal{I}(\mathbb{R}), \quad J_j = I_j \cap (-M, M] \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$$

とおくと，

$$J_j \cap J_k = \emptyset \ \text{ for } j \neq k, \quad J = \sum_{j=1}^{\infty} J_j \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$$

なので，(i)で示したことと$J_j \subset I_j$から

$$m(J) = \sum_{j=1}^{\infty} m(J_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) \leq \infty$$

となる．ここで，$M \to \infty$とすると，

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) = \infty$$

となって主張が従う．

Step 3.　$d \geq 2$かつ有限和の場合を考える．$(d-1)$次元での主張を仮定して，d次元のときの主張を示せばよい．有限個の互いに素な$I_j \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^d)$が

$$I := \sum_{j=1}^{n} I_j \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^d)$$

を満たしているとする．これらは以下の形であるとしてよい：

$$I_j = (a^{(j)}, b^{(j)}] \times I'_j, \quad I = (a, b] \times I', \quad I'_j, I' \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^{d-1}).$$

このとき，分点$a^{(1)}, b^{(1)}, \ldots, a^{(n)}, b^{(n)}$から重複を除いて並べ替えたものを

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \cdots = a_l < b_l = b$$

とし，各$j = 1, \ldots, n$に対し

$$I_j = \sum_{(a_k, b_k] \times I'_j \subset I_j} \left((a_k, b_k] \times I'_j\right)$$

と分割する．すると

$$\sum_{k=1}^{l} \left((a_k, b_k] \times I'\right) = I = \sum_{j=1}^{n} \sum_{J_{jk} \subset I_j} \left((a_k, b_k] \times I'_j\right)$$

であることから，各$k = 1, \ldots, l$に対し$I' = \sum_{J_{jk} \subset I_j} I'_j$が成り立つ．したがって，$(d-1)$次元前測度を$m'$で表すことにすると，次の等式を得る：

$$\begin{aligned} m(I) = (b-a)m'(I') &= \sum_{k=1}^{l} (b_k - a_k) m'(I') \\ &= \sum_{k=1}^{l} \sum_{J_{jk} \subset I_j} (b_k - a_k) m'(I'_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{J_{jk} \subset Ij} (b_k - a_k) m'(I'_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (b^{(j)} - a^{(j)}) m'(I'_j) = \sum_{j=1}^{n} m(I_j). \end{aligned}$$

Step 4.　Step 3. の結果を利用して，Step 2. と同様に議論すればよい．詳細は省略する．□

命題 3.3. $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$を単調非減少な右連続関数とし，関数$m_g\colon \mathcal{I}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$を

$$m_g(I) = g(b) - g(a) \quad \text{for } I = (a, b] \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$$

で定める．このとき，$(\mathbb{R}, \mathcal{I}(\mathbb{R}), m_g)$は前測度空間となる．

証明. 命題 3.2と同様に証明できるので，詳細は省略する．Step 2. の(i)に対応する議論をする際，$J, J_j \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$の存在を保証するために$g$の右連続性が必要となることに注意せよ．□

※　多次元への拡張も可能である．

§ 3.2 外測度

定義. 関数 $m^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ が X 上の**外測度**であるとは,

1. $m^*(\emptyset) = 0$,
2. （**単調性**）任意の $A, B \in \mathcal{P}(X)$ に対して, $A \subset B$ ならば
$$m^*(A) \leq m^*(B),$$
3. （**劣加法性**）任意の $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}(X)$ に対して,
$$m^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j),$$

を満たすことである.

定理 3.4. $(X, \mathcal{I}, m)$ を前測度空間とし, $m^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ を
$$m^*(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} m(I_j);\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j,\ I_j \in \mathcal{I}\Big\} \quad \text{for } A \subset X$$
で定義する．このとき, m^* は X 上の外測度であり, 任意の $I \in \mathcal{I}$ に対して
$$m^*(I) = m(I)$$
を満たす.

※　m^* を m（あるいは $(X, \mathcal{I}, m)$）から**誘導される外測度**と呼ぶ.

証明. Step 1.　ここでは m^* が外測度であることを示す．任意の $A \subset X$ に対し $m^*(A) \geq 0$ であることは定義から分かる．また, $\emptyset \subset \emptyset \in \mathcal{I}$ に注意すると,
$$0 \leq m^*(\emptyset) \leq m(\emptyset) = 0$$
である.

次に $A \subset B$ とする．$I_1, I_2, \ldots \in \mathcal{I}$ を $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ のようにとると, $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ が成り立つので,
$$m^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j)$$
となる．右辺において下限を取ると $m^*(A) \leq m^*(B)$ が従う.

また $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}(X)$ とする．任意の $\epsilon > 0$ に対し, $I_{jk} \in \mathcal{I}$ を
$$A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{jk}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} m(I_{jk}) \leq m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$$
となるように選ぶと,
$$m^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} m(I_{jk}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \epsilon$$
が成り立つ．$\epsilon > 0$ は任意だったので, 劣加法性も確かめることができた．よって m^* は X 上の外測度である.

Step 2.　任意の$I \in \mathcal{I}$をとる．まず$I \subset I \in \mathcal{I}$であることから

$$m^*(I) \leq m(I)$$

が成り立つ．逆の不等式を示そう．任意の覆い方$I \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$，$I_j \in \mathcal{I}$，に対し，有限個の互いに素な$J_{kl} \in \mathcal{I}$，$l = 1, \ldots, n_k$，が存在して，

$$I \cap I_1 = J_{11}, \quad (I \cap I_k) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} (I \cap I_j) \right) = \sum_{l=1}^{n_k} J_{kl} \quad \text{for } k \geq 2$$

と書ける．J_{kl}，$k = 1, 2, \ldots$，$l = 1, \ldots, n_k$，は互いに素で，$I = \sum_{k,l} J_{kl}$を満たすことに注意すると，mの完全加法性と補題 3.1 より

$$m(I) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n_k} m(J_{kl}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k)$$

が成り立つ．ここで，右辺の下限を取れば，$m(I) \leq m^*(I)$が従う．　□

例　命題 3.2で与えられた前測度空間$(\mathbb{R}^d, \mathcal{I}(\mathbb{R}^d), m)$から誘導される外測度$m^*$を**Lebesgue外測度**と呼ぶ．

例えば，$d = 1$のときは，任意の$A \subset \mathbb{R}$に対し

$$m^*(A) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j);\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j],\ -\infty \leq a_j \leq b_j \leq \infty \right\}$$

と書ける．特に，任意の$I = (a, b] \in \mathcal{I}$に対し

$$m^*(I) = m(I) = b - a$$

が成り立つ．

問　$A \subset \mathbb{R}$が高々可算集合であれば，$m^*(A) = 0$となることを示せ．

命題 3.5. 上の$m^*(A)$の表示は区間の種類に依らない．すなわち，例えば，

$$m^*(A) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j);\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j),\ -\infty \leq a_j \leq b_j \leq \infty \right\}$$

が成り立つ．

証明. 主張の等式の右辺を$m_1^*(A)$とおく．任意の被覆$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$をとる．このとき，$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j]$であるので，

$$m^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)$$

が成り立つ．右辺で下限をとることで

$$m^*(A) \leq m_1^*(A)$$

を得る．

次に，任意の$\epsilon > 0$に対し，被覆$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j]$を

$$\sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) \leq m^*(A) + \epsilon$$

となるようにとる．すると，$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j + 2^{-j}\epsilon)$が成り立つことから

$$m_1^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (b_j + 2^{-j}\epsilon - a_j) \leq m^*(A) + 2\epsilon$$

であり，$\epsilon > 0$が任意であったことから，

$$m_1^*(A) \leq m^*(A)$$

を得る．　□

※　閉区間を用いた場合の証明も同様である．さらに一般の次元dでも同様の結果が成立する．

例　命題 3.3で与えられる前測度空間$(\mathbb{R}, \mathcal{I}(\mathbb{R}), m_g)$から誘導される外測度$m_g^*$を**Lebesgue–Stieltjes外測度**と呼ぶ．

例えば，任意の$A \subset \mathbb{R}$に対し

$$m_g^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} (g(b_j) - g(a_j));\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j],\ -\infty \le a_j \le b_j \le \infty \Big\}$$

と書ける．特に，任意の$(a, b] \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$に対し

$$m_g^*((a, b]) = m_g((a, b]) = g(b) - g(a)$$

が成り立つ．

§ 3.3 測度空間の構成

定理 3.6. $m^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$を外測度とし，

$$\mathcal{L} = \Big\{ E \subset X;\ \forall A \subset X\ \ m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \Big\},$$
$$\mu = m^*|_{\mathcal{L}}\colon \mathcal{L} \to [0, \infty]$$

とおく．このとき，$(X, \mathcal{L}, \mu)$は測度空間となる．また任意の$N \subset X$に対し，

$$m^*(N) = 0 \quad \Rightarrow \quad N \in \mathcal{L}$$

が成り立ち，このことから特に，$(X, \mathcal{L}, \mu)$は完備となる．

※　$\mathcal{L}$の元を（**Carathéodoryの意味での**）m^***可測集合**と呼ぶ．

※　一般に任意の$E, A \subset X$に対して，外測度の劣加法性から，

$$m^*(A) \le m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

が成立する．よって，$E \in \mathcal{L}$を示すためには$\ge$を確かめれば十分である．

証明. Step 1.　$\emptyset \in \mathcal{L}$であること，および，任意の$E \in \mathcal{L}$に対し$E^c \in \mathcal{L}$が成り立つことは，$m^*$可測性の定義からすぐにわかる．

次に，任意の$E, F \in \mathcal{L}$に対して，$E \cap F \in \mathcal{L}$が成り立つことを示す．任意の$A \subset X$に対して，外測度の劣加法性とm^*可測性の定義により，

$$\begin{aligned}
&m^*\Big(A \cap (E \cap F)\Big) + m^*\Big(A \cap (E \cap F)^c\Big) \\
&= m^*\Big(A \cap E \cap F\Big) + m^*\Big(A \cap [E^c + (E \cap F^c)]\Big) \\
&\le m^*\Big((A \cap E) \cap F\Big) + m^*(A \cap E^c) + m^*\Big((A \cap E) \cap F^c\Big) \\
&= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \\
&= m^*(A)
\end{aligned}$$

が成り立つ．これは$E \cap F \in \mathcal{L}$を意味する．

Step 2.　次に，$\mathcal{L}$が完全加法族であることを示そう．完全加法性のみを確かめればよい．$E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{L}$とし，$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$とおく．このとき，

$$F_1 = E_1, \quad F_n = E_n \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \Big) \ \text{ for } n \ge 2$$

とおくと，これらは互いに素であり，またStep 1.により$F_j \in \mathcal{L}$である．今，任意の$A \subset X$に対し，外測度の劣加法性より，

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \le \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A \cap F_j) + m^*(A \cap E^c)$$

である．このことから，任意の$A \subset X$と任意の$n \ge 1$に対して

$$\sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap F_j) + m^*(A \cap E^c) \le m^*(A) \qquad (\spadesuit)$$

が成り立つことを示せばよい．

$(\spadesuit)$を示す．まず，$n=1$のときは

$$m^*(A\cap F_1)+m^*(A\cap E^c)\le m^*(A\cap F_1)+m^*(A\cap F_1^c)=m^*(A)$$

である．また，ある$n\ge 1$で$(\spadesuit)$が成立しているとすると，

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n+1} m^*(A\cap F_j)+m^*(A\cap E^c)\\&=m^*(A\cap F_{n+1})\\&\quad+\sum_{j=1}^{n} m^*(A\cap F_{n+1}^c\cap F_j)+m^*(A\cap F_{n+1}^c\cap E^c)\\&\le m^*(A\cap F_{n+1})+m^*(A\cap F_{n+1}^c)=m^*(A)\end{aligned}$$

である．よって，数学的帰納法により，$(\spadesuit)$が示された．

Step 3.　μが$\mathcal{L}$上の測度であることを示す．まず

$$\mu(\emptyset)=m^*(\emptyset)=0$$

である．次に$E_1,E_2,\ldots\in\mathcal{L}$を互いに素とし，$E=\sum_{j=1}^{\infty}E_j$とおく．まず，$m^*$の劣加法性から

$$\mu(E)=m^*(E)\le\sum_{j=1}^{\infty}m^*(E_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j)$$

である．一方，$(\spadesuit)$を$A=E$，$F_j=E_j$に対して適用すると，任意の$n\in\mathbb{N}$に対し

$$\mu(E)=m^*(E)\ge\sum_{j=1}^{n}m^*(E_j)=\sum_{j=1}^{n}\mu(E_j)\qquad\therefore\ \mu(E)\ge\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j)$$

を得る．よってμは完全加法的である．以上によりμは測度であることが示された．

Step 4.　最後の主張を示す．$N\subset X$かつ$m^*(N)=0$とする．このとき，m^*の単調性から

$$m^*(A\cap N)+m^*(A\cap N^c)\le m^*(N)+m^*(A)=m^*(A)$$

である．よって$N\in\mathcal{L}$がわかった．また

$$E\in\mathcal{L},\ \mu(E)=0,\ F\subset E$$

とする．このとき，

$$0\le m^*(F)\le m^*(E)=\mu(E)=0$$

なので，$m^*(F)=0$である．よって，上に示したことから$F\in\mathcal{L}$となり，$(X,\mathcal{L},\mu)$は完備である．□

定理 3.7. $(X,\mathcal{I},m)$を前測度空間，m^*をmから誘導される外測度とし，$(X,\mathcal{L},\mu)$をm^*が生成する完備測度空間とする．このとき，

$$\mathcal{I}\subset\mathcal{L}\ \ \text{かつ}\ \ \mu(I)=m(I)\ \ \text{for all } I\in\mathcal{I}\qquad(\heartsuit)$$

が成り立つ．

※　定理 3.7と後述の定理 3.8を合わせると，**Hopfの拡張定理**と呼ばれるものを含んでいる．本講義ではHopfの拡張定理そのものには触れない．

証明. 任意の$I \in \mathcal{I}$をとる．また，任意の$A \subset X$をとり，一つの覆い方

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \quad I_j \in \mathcal{I}$$

をとる．各$j \in \mathbb{N}$に対し，互いに素なある$J_{j1}, \dots, J_{jn_j} \in \mathcal{I}$が存在して

$$I_j \cap I^c = \sum_{k=1}^{n_j} J_{jk}$$

と書ける．すると，

$$A \cap I \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (I_j \cap I), \quad A \cap I^c \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (I_j \cap I^c) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n_j} J_{jk}$$

および

$$I_j = (I_j \cap I) + (I_j \cap I^c) = (I_j \cap I) + \sum_{k=1}^{n_j} J_{jk}$$

に注意して，m^*の定義とmの完全加法性により

$$m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I^c) \le \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j \cap I) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n_j} m(J_{jk}) = \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j)$$

が従う．右辺においてAの覆い方に関する下限をとると

$$m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I^c) \le m^*(A)$$

であり，よって$I \in \mathcal{L}$となる．

また，μの定義と定理 3.4によれば，任意の$I \in \mathcal{I}$に対し

$$\mu(I) = m^*(I) = m(I)$$

が成り立つ． □

定義. $(X, \mathcal{I}, m)$を前測度空間とし，それから定理 3.7によって構成される完備な拡張測度空間を$(X, \mathcal{L}, \mu)$とする．また，$\mu_\sigma = \mu|_{\sigma(\mathcal{I})}$とおくと，制限

$$(X, \sigma(\mathcal{I}), \mu_\sigma) \subset (X, \mathcal{L}, \mu)$$

もまた$(X, \mathcal{I}, m)$の拡張測度空間である．本講義では，以下の用語を導入する．

1. $(X, \mathcal{L}, \mu)$を$(X, \mathcal{I}, m)$の**Carathéodoryの方法による完備拡張**と呼ぶことにする．
2. $(X, \sigma(\mathcal{I}), \mu_\sigma)$を$(X, \mathcal{I}, m)$の**Carathéodoryの方法による極小拡張**と呼ぶことにする．

§ 3.4 最小拡張の一意存在

定義. 前測度空間$(X, \mathcal{I}, m)$がσ**有限**であるとは，高々可算個の$X_1, X_2, \dots \in \mathcal{I}$が存在して，以下を満たすことである：

$$X = \bigcup_j X_j, \quad m(X_j) < \infty.$$

また，測度空間$(X, \mathcal{B}, \mu)$がσ**有限**であるとは，前測度空間としてσ有限であることとする．

問. 1. 上のX_jは初めから互いに素としてもよい．これを示せ．

2. 測度空間$(X, \mathcal{B}, \mu)$がσ有限であるとき，上のX_jは初めから単調非減少としてもよい．これを示せ．

定理 3.8. $(X, \mathcal{I}, m)$ を σ 有限な前測度空間とし，その Carathéodory の方法による極小拡張を $(X, \sigma(\mathcal{I}), \mu_\sigma)$ とする．このとき，$(X, \sigma(\mathcal{I}), \mu_\sigma)$ は $(X, \mathcal{I}, m)$ を含む最小の測度空間である．すなわち，m の $\sigma(\mathcal{I})$ 上への拡張測度は一意的である．

証明. ν を m の任意の拡張測度とする．任意の $E \in \sigma(\mathcal{I})$ に対して

$$\nu(E) = \mu(E)$$

が成り立つことを示せばよい．

まず，任意の覆い方

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \quad I_j \in \mathcal{I},$$

に対し

$$\nu(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j)$$

が成り立つので，右辺において覆い方に関する下限をとると

$$\nu(E) \leq m^*(E) = \mu(E)$$

を得る．

一方，σ 有限性の定義に現れるような互いに素な $X_j \in \mathcal{I}$ をとって

$$Y_k = \sum_{j=1}^{k} X_j \in \sigma(\mathcal{I})$$

とおく．上の結果から

$$\begin{aligned} \nu(Y_k) - \nu(Y_k \cap E) &= \nu(Y_k \setminus E) \\ &\leq \mu(Y_k \setminus E) = \mu(Y_k) - \mu(Y_k \cap E) \end{aligned}$$

であり，$\nu(Y_k) = \mu(Y_k) < \infty$ と合わせて，

$$\mu(Y_k \cap E) \leq \nu(Y_k \cap E)$$

を得る．$E \cap Y_k$ は k の関して単調非減少なので，結局

$$\mu(E) = \lim_{k \to \infty} \mu(E \cap Y_k) \leq \lim_{k \to \infty} \nu(E \cap Y_k) = \nu(E)$$

が従う． □

§ 3.5 最小完備拡張の一意存在

定理 3.9. $(X, \mathcal{I}, m)$ を σ 有限な前測度空間とし，その Carathéodory の方法による完備拡張を $(X, \mathcal{L}, \mu)$ とする．このとき，$(X, \mathcal{L}, \mu)$ は $(X, \mathcal{I}, m)$ を含む最小の完備測度空間である．すなわち，$(X, \mathcal{L}, \mu)$ は Carathéodory の方法による極小拡張 $(X, \sigma(\mathcal{I}), \mu_\sigma)$ の完備化に一致する．

証明. 最後の主張を示す．$(X, \sigma(\mathcal{I}), \mu_\sigma)$ の完備化を $(X, \mathcal{M}, \nu)$ と書くと，その最小性により

$$(X, \mathcal{M}, \nu) \subset (X, \mathcal{L}, \mu)$$

である．よってあとは $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ を示せばよい．

$E \in \mathcal{L}$とする．σ有限性の定義に現れる$X_j \in \mathcal{I}$をとって，$E \cap X_j \in \mathcal{M}$が示せばよいが，このとき

$$E \cap X_j \in \mathcal{L}, \quad \mu(E \cap X_j) \le \mu(X_j) = m(X_j) < \infty$$

となることに注意すると，はじめから$\mu(E) < \infty$として一般性を失わない．$E \in \mathcal{M}$を示すためには，完備化の定義より，ある$F, G \in \sigma(\mathcal{I})$で

$$F \subset E \subset G, \quad \mu_\sigma(G \setminus F) = 0$$

を満たすものを構成すればよい．まずGを構成する：各$j = 1, 2, \ldots$に対してある$I_{jk} \in \mathcal{I}$, $k = 1, 2, \ldots$, が存在して

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{jk}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} m(I_{jk}) \le m^*(E) + j^{-1} = \mu(E) + j^{-1}$$

が成り立つ．そこで，

$$G = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j \in \sigma(\mathcal{I}); \quad G_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{jk} \in \sigma(\mathcal{I}),$$

とおくと，$E \subset G$であり，$E, G, G_j \in \mathcal{L}$, $\mu(E) < \infty$より

$$\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E) \le \mu(G_j) - \mu(E) \le j^{-1}$$

となる．以上をまとめて，ある$G \in \sigma(\mathcal{I}) \subset \mathcal{L}$で

$$E \subset G, \quad \mu(G \setminus E) = 0$$

を満たすものが構成できた．同様の議論を$G \setminus E \in \mathcal{L}$に対して繰り返すと，ある$N \in \sigma(\mathcal{I}) \subset \mathcal{L}$で

$$G \setminus E \subset N, \quad \mu(N \setminus (G \setminus E)) = 0$$

を満たすものが構成できる．さて今，$F = G \setminus N \in \sigma(\mathcal{I})$とおくと，

$$F \subset G \setminus (G \setminus E) = E$$

であり，さらに

$$\begin{aligned} \mu_\sigma(G \setminus F) &= \mu(G \setminus F) = \mu(G \setminus E) + \mu(E \setminus F) \\ &= \mu(E \setminus (G \setminus N)) = \mu(N \setminus (G \setminus E)) = 0 \end{aligned}$$

となる．よって求めるべき$F, G \in \sigma(\mathcal{I})$が構成できた．□

§ 3.6 Lebesgue測度空間

定義 3.10. $(\mathbb{R}^d, \mathcal{I}(\mathbb{R}^d), m)$を命題 3.2の前測度空間とする．この前測度空間のCarathéodoryの方法による極小拡張，完備拡張をそれぞれ

$$(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu_{\mathcal{B}}), \quad (\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mu_{\mathcal{L}})$$

で表し，特に後者を**Lebesgue測度空間**と呼ぶ．

定義 3.11. $(\mathbb{R}, \mathcal{I}(\mathbb{R}), m_g)$を命題 3.3の前測度空間とする．この前測度空間のCarathéodoryの方法による極小拡張を

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_g)$$

で表し，これを**Lebesgue–Stieltjes測度空間**と呼ぶ．

※　これらがそれぞれ例 2.4，2.11および2.5の測度空間と同一のものとなっていることは，定理 3.8と3.9からわかる．例 2.8，2.9も参照せよ．

本節では以下，Lebesgue測度空間の基本的な性質について述べる．

定義. Xを位相空間とする．

- $G \subset X$が$\mathcal{G}_\delta$**集合**であるとは，高々可算個の開集合$G_1, G_2, \ldots \subset X$を用いて$G = \bigcap_j G_j$と表されることである．
- $F \subset X$が$\mathcal{F}_\sigma$**集合**であるとは，高々可算個の閉集合$F_1, F_2, \ldots \subset X$を用いて$F = \bigcup_j F_j$と表されることである．
- $G \subset X$が$\mathcal{G}_{\delta\sigma}$**集合**であるとは，高々可算個の$\mathcal{G}_\delta$集合$G_1, G_2, \ldots \subset X$を用いて$G = \bigcup_j G_j$と表されることである．
- ．．．以下同様とする．

定理 3.12（Lebesgue測度の正則性）. 任意の$E \subset \mathbb{R}^d$に対して，以下は互いに同値である：

1. $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$；

2. 任意の$\epsilon > 0$に対してある開集合$G \supset E$が存在して$m^*(G \setminus E) < \epsilon$；

3. ある$\mathcal{G}_\delta$集合$G \supset E$が存在して$m^*(G \setminus E) = 0$；

4. ある$\mathcal{G}_\delta$集合GとLebesgue零集合Nが存在して$E = G \setminus N$；

5. 任意の$\epsilon > 0$に対してある閉集合$F \subset E$が存在して$m^*(E \setminus F) < \epsilon$；

6. ある$\mathcal{F}_\sigma$集合$F \subset E$が存在して$m^*(E \setminus F) = 0$；

7. ある$\mathcal{F}_\sigma$集合FとLebesgue零集合Nが存在して$E = F \cup N$.

証明. (1. ⇒ 2.)　$\epsilon > 0$とする．$E_n = E \cap (-n, n]^d$とおく．命題 3.5によりある開区間$I_{nj} \subset \mathbb{R}^d$が存在して

$$E_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{nj}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |I_{nj}| < m^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

とできる．よって$G_n = \bigcup_j I_{nj}$, $G = \bigcup_n G_n$とおけば，Gは開集合であり，m^*の劣加法性および$E_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, $m^*(E_n) < \infty$に注意して，

$$\begin{aligned} m^*(G \setminus E) &\le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(G_n \setminus E) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(G_n \setminus E_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(m^*(G_n) - m^*(E_n) \Big) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |I_{nj}| - m^*(E_n) \right) < \epsilon \end{aligned}$$

を得る．

(2. ⇒ 3.)　2.により，開集合$G_j \subset \mathbb{R}^d$で$m^*(G_j \setminus E) < j^{-1}$を満たすものが存在する．$G = \bigcap_j G_j$とおけば，$G$は$\mathcal{G}_\delta$集合であり，任意の$j$に対し

$$0 \le m^*(G \setminus E) \le m^*(G_j \setminus E) \le j^{-1}$$

が成り立つ．$j \to \infty$として，3.が従う．

(3. ⇒ 4.)　3.の$\mathcal{G}_\delta$集合Gをとって$N = G \setminus E$とおけば，4.が従う．

(4. ⇒ 1.)　$G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$および$N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$から1.が分かる．

(1. ⇒ 5.)　$\epsilon > 0$とする．2.により，$E^c \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$に対して開集合$G$を$m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$を満たすようにとる．すると閉集合$F = G^c$に対して

$$m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \epsilon$$

が成り立つ．

(5. ⇒ 6. ⇒ 7. ⇒ 1.)　2. ⇒ 3. ⇒ 4. ⇒ 1.と同様に議論することができるので，証明を省略する．□

$C(\mathbb{R}^d)$を$\mathbb{R}^d$上の$\mathbb{C}$値連続関数全体の集合とし，

$$C_0(\mathbb{R}^d) = \left\{ \phi \in C(\mathbb{R}^d);\ \operatorname{supp}\phi \Subset \mathbb{R}^d \right\}$$

とおく．ただし，$\operatorname{supp}\phi$は

$$\operatorname{supp}\phi = \overline{\left\{ x \in \mathbb{R}^d;\ \phi(x) \neq 0 \right\}}$$

で定義される$\mathbb{R}^d$の部分集合で，ϕの**台**と呼ばれる．

系 3.13. $f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{C}}$をLebesgue可積分関数とする．このとき，任意の$\epsilon > 0$に対して，ある$\phi \in C_0(\mathbb{R}^d)$が存在して

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - \phi| \, \mathrm{d}\mu < \epsilon$$

が成り立つ．

※　さらにϕを$C_0^\infty(\mathbb{R}^d) := C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C_0(\mathbb{R}^d)$からとることもできる．この事実は**軟化子**を用いて証明される．

証明. Step 1.　まず，ある有界な$E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$を用いて

$$f = \chi_E$$

と書ける場合を考える．定理 3.12から，ある有界閉集合Fと有界開集合Gが存在して

$$F \subset E \subset G, \quad \mu(G \setminus F) = m^*(G \setminus F) < \epsilon$$

となる．そこで，例えば，$\phi \in C_0(\mathbb{R}^d)$を

$$\phi(x) = \frac{\mathrm{dist}(x, G^c)}{\mathrm{dist}(x, F) + \mathrm{dist}(x, G^c)}$$

で定める．すると，F上で$\phi = 1$かつG^c上で$f = 0$であることから，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - \phi| \, \mathrm{d}\mu = \int_{G \setminus F} |f - \phi| \, \mathrm{d}\mu \le \int_{G \setminus F} 1 \, \mathrm{d}\mu = \mu(G \setminus F) < \epsilon$$

が成り立つ．よって主張が従う．

Step 2.　次に，ある測度有限な$E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$を用いて

$$f = \chi_E$$

と書ける場合を考える．任意の$\epsilon > 0$をとる．$E_n = E \cap (-n, n]^d$とおく．$n \to \infty$のとき，χ_Eを優関数としてLebesgue収束定理を用いると，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E - \chi_{E_n}| \, \mathrm{d}\mu \to 0$$

となるので，十分大きな$n \ge 0$に対し

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E - \chi_{E_n}| \, \mathrm{d}\mu < \epsilon$$

が成り立つ．するとStep 1.の結果から，$\phi \in C_0(\mathbb{R}^d)$を適当に選んで

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E - \phi| \, \mathrm{d}\mu \le \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E - \chi_{E_n}| \, \mathrm{d}\mu + \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_{E_n} - \phi| \, \mathrm{d}\mu < 2\epsilon$$

とすることができる．したがって，主張が従う．

Step 3.　fが非負値可積分関数の場合を考える．任意の$\epsilon > 0$をとる．積分の定義から，ある単関数

$$g = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{E_j}; \quad \alpha_j \in (0, \infty), \quad E_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \quad \mu(E_j) < \infty,$$

が存在して

$$0 \le g \le f, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |f - g| \, \mathrm{d}\mu < \epsilon$$

とできる．Step 2.の結果より，任意の$\delta > 0$に対し，$\phi_j \in C_0(\mathbb{R}^d)$を

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\chi_{E_j} - \phi_j| \, \mathrm{d}\mu < \delta \quad \text{for } j = 1, \ldots, N$$

のようにとって，

$$\phi = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_j \in C_0(\mathbb{R}^d)$$

とおく．すると，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - \phi| \, \mathrm{d}\mu \le \int_{\mathbb{R}^d} |f - g| \, \mathrm{d}\mu + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_{E_j} - \phi_j| \, \mathrm{d}\mu$$
$$< \epsilon + \delta \sum_{j=1}^{N} \alpha_j$$

となるので，α_jに応じて$\delta > 0$を十分小さく選んでおくことで，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - \phi| \, \mathrm{d}\mu < 2\epsilon$$

とできる．よって主張が従う．

Step 4.　一般の可積分関数fに対しては，fの実部と虚部それぞれの正の部分と負の部分に対して，Step 3.の結果を適用すればよい．□

§ 3.7 直積測度空間

定理 3.14. $(X, \mathcal{B}, \mu)$, $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ を σ 有限な測度空間とし,

$$\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} = \sigma(\mathcal{B} \times \mathcal{C}); \quad \mathcal{B} \times \mathcal{C} = \left\{ E \times F \subset X \times Y;\ E \in \mathcal{B},\ F \in \mathcal{C} \right\},$$

とおく．このとき，$(X \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ 上の測度 $\mu \otimes \nu$ で

$$(\mu \otimes \nu)(E \times F) = \mu(E)\nu(F) \quad \text{for all } E \times F \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}$$

を満たすものが一意的に存在する．

※　$(X \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mu \otimes \nu)$ を**直積測度空間**と呼ぶ．また，その完備化を**完備直積測度空間**と呼び，$(X \times Y, \mathcal{B} \overline{\otimes} \mathcal{C}, \mu \overline{\otimes} \nu)$ であらわす．

証明. $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ が集合半代数であることにはすぐに確かめられる．今,

$$m(E \times F) = \mu(E)\nu(F) \quad \text{for } E \times F \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}$$

により $m \colon \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to [0, \infty]$ を定めると，これは前測度となることを示す．

$m(\emptyset) = 0$ は自明である．また高々可算個の互いに素な $E_j \times F_j \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ が

$$\sum_j (E_j \times F_j) = E \times F \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}$$

を満たしているとする．このとき,

$$\chi_E(x)\chi_F(y) = \sum_j \chi_{E_j}(x)\chi_{F_j}(y) \quad \text{for } (x, y) \in X \times Y$$

である．これを $x \in X$, $y \in Y$ について順次積分すると，単調収束定理より,

$$m(E \times F) = \mu(E)\nu(F) = \sum_j \mu(E_j)\nu(F_j) = \sum_j m(E_j \times F_j)$$

が従う．

前測度空間 $(X \times Y, \mathcal{B} \times \mathcal{C}, m)$ が σ 有限であることを示す．集合列 $X_j \in \mathcal{B}$, $Y_j \in \mathcal{C}$ を

$$X = \bigcup_j X_j, \quad \mu(X_j) < \infty, \quad Y = \bigcup_j Y_j, \quad \nu(Y_j) < \infty,$$

のようにとる．すると $Z_{jk} = X_j \times Y_k \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ は

$$X \times Y = \bigcup_{j,k} Z_{jk}, \quad m(Z_{jk}) < \infty$$

を満たす．

さて今，$(X \times Y, \mathcal{B} \times \mathcal{C}, m)$ の Carathéodory の方法によって得られる極小拡張を $(X \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mu \otimes \nu)$ とする．このとき定理 3.8 により，これは最小の拡張測度空間であり，したがって一意的である．　□

命題 3.15. $p, q \in \mathbb{N}$ とする．p, q 次元 Lebesgue 測度空間の完備直積は，$(p+q)$ 次元 Lebesgue 測度空間に一致する：

$$\left(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \mathcal{L}(\mathbb{R}^p) \overline{\otimes} \mathcal{L}(\mathbb{R}^q), \mu_p \overline{\otimes} \mu_q \right) = \left(\mathbb{R}^{p+q}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^{p+q}), \mu_{p+q} \right).$$

ただし，ここでは d 次元 Lebesgue 測度を μ_d で表すことにする．

証明. まず，$\left(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \mathcal{L}(\mathbb{R}^p) \overline{\otimes} \mathcal{L}(\mathbb{R}^q), \mu_p \overline{\otimes} \mu_q \right)$ は完備であり，かつ,

$$\mathcal{I}(\mathbb{R}^p) \times \mathcal{I}(\mathbb{R}^q) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^p) \overline{\otimes} \mathcal{L}(\mathbb{R}^q),$$
$$(\mu_p \overline{\otimes} \mu_q)(I \times J) = m_p(I) m_q(J) \quad \text{for all } I \times J \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^p) \times \mathcal{I}(\mathbb{R}^q)$$

が成り立つので，$\left(\mathbb{R}^{p+q}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^{p+q}), \mu_{p+q} \right)$ の最小性から

$$\left(\mathbb{R}^{p+q}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^{p+q}), \mu_{p+q} \right) \subset \left(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \mathcal{L}(\mathbb{R}^p) \overline{\otimes} \mathcal{L}(\mathbb{R}^q), \mu_p \overline{\otimes} \mu_q \right)$$

である．ただし上では $\mathcal{I}(\mathbb{R}^d)$ 上の前測度を m_d で表した．

逆の包含関係の証明の概略を与える．$\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^q)\subset\mathcal{L}(\mathbb{R}^{p+q})$ を示せば十分であることが分かる．そこで任意の $E\times E'\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^q)$ をとる．このとき，ある $F,G\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ および $F',G'\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$ が存在して

$$F\subset E\subset G,\quad \mu_p(G\setminus F)=0,\quad F'\subset E'\subset G',\quad \mu_q(G'\setminus F')=0$$

が成り立つ．すると，簡単な論証により $F\times F',G\times G'\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q})$ が示され，また明らかに

$$F\times F'\subset E\times E'\subset G\times G'$$

である．さらに

$$(G\times G')\setminus(F\times F')\subset[(G\setminus F)\times G']\cup[G\times(G'\setminus F')]$$

の右辺において，その外測度を $(\mathbb{R}^d,\mathcal{I}(\mathbb{R}^d),m_d)$ の σ 有限性に注意して計算すると

$$\mu_{p+q}\Big((G\times G')\setminus(F\times F')\Big)=0$$

が示せる．以上のことより，$E\times E'\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^{p+q})$ が従う． □

定理 3.16. $(X,\mathcal{B},\mu)$, $(Y,\mathcal{C},\nu)$, $(Z,\mathcal{D},\lambda)$ を σ 有限な測度空間とすると，

$$(\mathcal{B}\otimes\mathcal{C})\otimes\mathcal{D}=\mathcal{B}\otimes(\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}),\quad (\mu\otimes\nu)\otimes\lambda=\mu\otimes(\nu\otimes\lambda)$$

が成り立つ．さらに

$$(\mathcal{B}\otimes\mathcal{C})\,\overline{\otimes}\,\mathcal{D}=(\mathcal{B}\,\overline{\otimes}\,\mathcal{C})\,\overline{\otimes}\,\mathcal{D}=\mathcal{B}\,\overline{\otimes}\,(\mathcal{C}\,\overline{\otimes}\,\mathcal{D})=\mathcal{B}\,\overline{\otimes}\,(\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}),$$
$$(\mu\otimes\nu)\,\overline{\otimes}\,\lambda=(\mu\,\overline{\otimes}\,\nu)\,\overline{\otimes}\,\lambda=\mu\,\overline{\otimes}\,(\nu\,\overline{\otimes}\,\lambda)=\mu\,\overline{\otimes}\,(\nu\otimes\lambda)$$

が成り立つ.（※ よって括弧は省略してよい.）

証明. 概略のみ与える．前半については，まず定理 3.14 と同様に

$$m(E\times F\times G)=\mu(E)\nu(F)\lambda(G)\quad \text{for } E\times F\times G\in\mathcal{B}\times\mathcal{C}\times\mathcal{D}$$

と定め，$(X\times Y\times Z,\mathcal{B}\times\mathcal{C}\times\mathcal{D},m)$ が前測度空間となることを確かめる．あとは，これの Carathéodory の方法による極小拡張の最小性（定理 3.8）と，

$$\sigma(\mathcal{B}\times\mathcal{C}\times\mathcal{D})=\sigma((\mathcal{B}\otimes\mathcal{C})\times\mathcal{D})=\sigma(\mathcal{B}\times(\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}))$$

に注意すればよい.

後半については，まず $(X\times Y\times Z,\mathcal{B}\times\mathcal{C}\times\mathcal{D},m)$ の Carathéodory の方法による完備拡張が，その最小性（定理 3.9）により，主張の4つの完備測度空間に含まれることを示す．逆の包含関係は命題 3.15 と同様に示される． □

§ 3.8 Fubini–Tonelliの定理

この小節では常に，$(X,\mathcal{L},\lambda)$，$(Y,\mathcal{M},\mu)$ を σ 有限な完備測度空間とする.

定理 3.17（Tonelli). $f\colon X\times Y\to[0,\infty]$ を $\mathcal{L}\,\overline{\otimes}\,\mathcal{M}$ 可測関数とする.

1. μ-a.e. $y\in Y$ に対し $f(\cdot,y)$ は $\mathcal{L}$ 可測関数であり，λ-a.e. $x\in X$ に対し $f(x,\cdot)$ は $\mathcal{M}$ 可測関数である；
2. $\displaystyle\int_X f(x,\cdot)\,\mathrm{d}\lambda(x)$ は $\mathcal{M}$ 可測であり，$\displaystyle\int_Y f(\cdot,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ は $\mathcal{L}$ 可測である；
3. 次の等式が成り立つ（※ ∞ の場合も含めて成立することに注意せよ）：

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\lambda\,\overline{\otimes}\,\mu)(x,y)&=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\mu(y)\\&=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\lambda(x).\end{aligned}$$

定理 3.18 (Fubini). $f\colon X \times Y \to \overline{\mathbb{C}}$ を $\lambda \mathbin{\overline{\otimes}} \mu$ 可積分関数とする．

1. μ-a.e. $y \in Y$ に対し $f(\cdot, y)$ は λ 可積分であり，λ-a.e. $x \in X$ に対し $f(x, \cdot)$ は μ 可積分である；
2. $\int_X f(x, \cdot)\,\mathrm{d}\lambda(x)$ は μ 可積分であり，$\int_Y f(\cdot, y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ は λ 可積分である；
3. 次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\lambda \mathbin{\overline{\otimes}} \mu)(x,y) &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\mu(y)\\ &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\lambda(x).\end{aligned}$$

証明． $f \geq 0$ の場合に帰着され，あとは定理 3.17 を用いればよい． □

※　Tonelli の定理，Fubini の定理そして下の Fubini–Tonelli の定理のいずれにおいても，注意 2.25 の規約を暗に用いている．

系 3.19 (Fubini–Tonelli). f を $\lambda \mathbin{\overline{\otimes}} \mu$ 可測関数とする．もし

$$\int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda(y)\right)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\lambda(x)$$

のいずれかが有限であれば，f は $\lambda \mathbin{\overline{\otimes}} \mu$ 可積分であり，以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\lambda \mathbin{\overline{\otimes}} \mu)(x,y) &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\mu(y)\\ &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\lambda(x).\end{aligned}$$

証明． Tonelli の定理から前半の主張が従う．後半は明らかである． □

※　与えられた具体的な積分に対し，Fubini の定理を適用して，逐次積分で計算するには，まず可積分性を確かめる必要があり，そのためには Tonelli の定理を利用するのが有効である．Tonelli の定理も上の系もすべてまとめて単に Fubini の定理と呼ぶこともある．

○ Tonelli の定理の証明

補題 3.20. 任意の部分集合族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ に対し，以下を満たす最小の部分集合族 $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$ が存在する．

1. $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}$；
2. $A, B \in \mathfrak{M}$ かつ $A \cap B = \emptyset$ ならば，$A + B \in \mathfrak{M}$；
3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{M}$ かつ $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ ならば，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$；
4. $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{M}$ かつ $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ ならば，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

証明． 命題 2.2 と同様に示すことができるので，証明を省略する． □

※　以下，補題 3.20 のような $\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ で表す．

補題 3.21. $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ を集合半代数とすると，

$$\mathfrak{M}(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I})$$

が成り立つ．

※　通常は**有限加法族**および**単調族**を導入し，**単調族定理**を引用することが多い．参考書等の議論も参照せよ．

証明． Step 1.　$\sigma(\mathcal{I})$ は補題 3.20 の条件 1.–4. で $\mathcal{A} = \mathcal{I}$ としたものを当然満たすので，$\mathfrak{M}(\mathcal{I})$ の最小性から

$$\mathfrak{M}(\mathcal{I}) \subset \sigma(\mathcal{I})$$

が従う．よって逆向きの包含関係を示せばよく，そのためには $\mathfrak{M}(\mathcal{I})$ が完全加法族であることを確かめればよい．

Step 2.　まず任意の $I \in \mathcal{I}$ と $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$ に対し $I \cap A \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$ であることを示す．任意の $I \in \mathcal{I}$ に対し

$$\mathfrak{N}_I = \left\{A \in \mathfrak{M}(\mathcal{I});\ I \cap A \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})\right\}$$

とおいて，$\mathfrak{M}(\mathcal{I}) \subset \mathfrak{N}_I$ が成り立つことを示せばよい．そのために，$\mathfrak{N}_I$ が補題 3.20 の条件 1.–4. で $\mathcal{A} = \mathcal{I}$ としたものを満たすことを確かめよう．

まず，任意の $J \in \mathcal{I}$ に対して，

$$J \in \mathcal{I} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{I}), \quad I \cap J \in \mathcal{I} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{I})$$

なので，$J \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$，すなわち $\mathcal{I} \subset \mathfrak{N}_I$ が成り立つ．

また，任意の互いに素な $A, B \in \mathfrak{N}_I$ に対し，$A, I \cap A, B, I \cap B \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$ に注意すると，

$$A + B \in \mathfrak{M}(\mathcal{I}), \quad I \cap (A + B) = (I \cap A) + (I \cap B) \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$$

が成り立つ．よって $A + B \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$ である．

さらに $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{N}_I$ かつ $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ とすると，上と同様に考えて，

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}(\mathcal{I}), \quad I \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (I \cap A_j) \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$$

なので，$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{N}$ である．

$A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{N}_I$ かつ $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ に対しても同様に議論できる．

以上により，$\mathfrak{N}_I$ が補題 3.20 の条件 1.–4. で $\mathcal{A} = \mathcal{I}$ としたものを満たすことが分かり，したがって $\mathfrak{M}(\mathcal{I})$ の最小性から，$\mathfrak{M}(\mathcal{I}) \subset \mathfrak{N}_I$ が従う．

Step 3.　次に，任意の $A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$ に対し $A \cap B \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$ であることを示す．Step 2. と同様に，任意の $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$ に対し

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_A = \left\{B \in \mathfrak{M}(\mathcal{I});\ A \cap B \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})\right\}$$

とおいて，$\mathfrak{M}(\mathcal{I}) \subset \widetilde{\mathfrak{N}}_A$ となることを示せばよく，そのためには，$\widetilde{\mathfrak{N}}_A$ に対し，補題 3.20 の条件 1.–4. で $\mathcal{A} = \mathcal{I}$ としたものを確かめればよい．

しかし，Step 2. の結果から，$\mathcal{I} \subset \widetilde{\mathfrak{N}}_A$ が従い，残りの 2.–4. も Step 2. と同様に示すことができる．よって，$\mathfrak{M}(\mathcal{I})$ の最小性から $\mathfrak{M}(\mathcal{I}) \subset \widetilde{\mathfrak{N}}_A$ を得る．

Step 4.　最後に，任意の $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$ に対し $A^c \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$ であることを示す．Steps 2.,3. と同様に

$$\mathfrak{N}_c = \left\{A \in \mathfrak{M}(\mathcal{I});\ A^c \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})\right\}$$

とおいて，$\mathfrak{M}(\mathcal{I}) \subset \mathfrak{N}_c$ となることを示せばよい．

まず任意の $I \in \mathcal{I}$ に対し，ある有限個の互いに素な $J_1, \ldots, J_n \in \mathcal{I} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{I})$ が存在して

$$I \in \mathcal{I} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{I}), \quad I^c = J_1 + \cdots + J_n \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$$

が成り立つので，$\mathcal{I} \subset \mathfrak{N}_c$ である．

また，$A, B \in \mathfrak{N}_c$かつ$A \cap B = \emptyset$とすると，$A, B, A^c, B^c \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$および Step 3. の結果に注意して，

$$A + B \in \mathfrak{M}(\mathcal{I}), \quad (A+B)^c = A^c \cap B^c \in \mathfrak{M}(\mathcal{I}),$$

すなわち，$A + B \in \mathfrak{N}_c$である．

$A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{N}_c$かつ$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$とすると，$A_j, A_j^c \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$および$A_1^c \supset A_2^c \supset \cdots$に注意して，

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}(\mathcal{I}), \quad \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^c \in \mathfrak{M}(\mathcal{I})$$

となる．よって$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{N}_c$である．

$A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{N}_c$かつ$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$に対しても同様に議論できる．

以上により，$\mathfrak{M}(\mathcal{I})$は完全加法族であることを確かめられ，よって補題の主張が従う． □

補題 3.22. $G \in \mathcal{L} \,\overline{\otimes}\, \mathcal{M}$とする．定義関数$f = \chi_G$に対してTonelliの定理（定理 3.17）の主張が成立する．

証明. 主張はx, y変数について対称なため，一方に対してのみ示す．

Step 1.　任意の$G \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$と$y \in Y$に対し，$\chi_G(\cdot, y)$は$\mathcal{L}$可測関数であることを示す．そのためには

$$\mathcal{S} = \left\{ S \subset X \times Y;\ \chi_S(\cdot, y) \text{は}\mathcal{L}\text{可測関数} \right\}$$

とおいて，$\mathcal{L} \times \mathcal{M} \subset \mathcal{S}$かつ$\mathcal{S}$は完全加法族となることを示せばよい．実際このとき，

$$\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} = \sigma(\mathcal{L} \times \mathcal{M}) \subset \mathcal{S}$$

が成り立ち，したがって確かに$\chi_G(\cdot, y)$は$\mathcal{L}$可測となる．

上の主張を示そう．まず，任意の$E \times F \in \mathcal{L} \times \mathcal{M}$に対し，

$$\chi_{E \times F}(\cdot, y) = \chi_E(\cdot) \chi_F(y)$$

なので，これは確かに$\mathcal{L}$可測であり，よって$E \times F \in \mathcal{S}$である．これから特に$\emptyset \in \mathcal{S}$も従う．

また，$S \in \mathcal{S}$とすると

$$\chi_{S^c}(\cdot, y) = 1 - \chi_S(\cdot, y)$$

であり，これは$\mathcal{L}$可測である．よって$S^c \in \mathcal{S}$である．

さらに，$S_1, S_2, \ldots \in \mathcal{S}$とすると，

$$\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j}(\cdot, y) = \lim_{n \to \infty} \chi_{\bigcup_{j=1}^{n} S_j}(\cdot, y)$$

となる．右辺は各点で単調非減少なので必ず極限が存在することに注意せよ．するとこれは$\mathcal{L}$可測である．よって$\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \in \mathcal{S}$が分かる．

Step 2.　次に任意の$G \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$に対し，$\int_X \chi_G(x, \cdot)\, \mathrm{d}\lambda(x)$が$\mathcal{M}$可測関数となることを示す．

Xのσ有限性の定義に現れる互いに素な$X_j \in \mathcal{L}$をとって，

$$G = \sum_{j=1}^{\infty} G_j; \quad G_j := G \cap (X_j \times Y),$$

と分割する．もし$\int_X \chi_{G_j}(x, \cdot)\, \mathrm{d}\lambda(x)$が$\mathcal{M}$可測なら，単調収束定理により

$$\int_X \chi_G(x, \cdot)\, \mathrm{d}\lambda(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \chi_{G_j}(x, \cdot)\, \mathrm{d}\lambda(x)$$

と書けるので，主張が従う．よってここでは$\lambda(X) < \infty$としてよい．

今，

$$\mathcal{S} = \left\{ S \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{M};\ \int_X \chi_S(x,\cdot)\,\mathrm{d}\lambda(x)\text{ は }\mathcal{M}\text{ 可測関数} \right\}$$

とおいて$\mathcal{L}\otimes\mathcal{M} \subset \mathcal{S}$を示そう．$\mathcal{L}\times\mathcal{M}$が集合半代数であることと命題 3.21 によれば，$\mathfrak{M}(\mathcal{L}\times\mathcal{M}) \subset \mathcal{S}$を示せばよく，そのためには，補題 3.20の条件1.–4.を$\mathfrak{M} = \mathcal{S}$，$\mathcal{I} = \mathcal{L}\times\mathcal{M}$として確かめればよい．

今，$\mathcal{L}\times\mathcal{M} \subset \mathcal{S}$は明らかであり，また条件2.も明らかである．さらに

$$S_j, T_j \in \mathcal{S}, \quad S_1 \subset S_2 \subset \cdots, \quad T_1 \supset T_2 \supset \cdots$$

とすると，$\lambda(X) < \infty$とLebesgue収束定理より，

$$\int_X \chi_{\bigcup_j S_j}(x,\cdot)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \lim_{j\to\infty} \int_X \chi_{S_j}(x,\cdot)\,\mathrm{d}\lambda(x),$$
$$\int_X \chi_{\bigcap_j T_j}(x,\cdot)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \lim_{j\to\infty} \int_X \chi_{T_j}(x,\cdot)\,\mathrm{d}\lambda(x),$$

である．よって条件3.,4.も確かめられた．

Step 3.　さらに，任意の$G \in \mathcal{L}\otimes\mathcal{M}$に対し

$$\int_{X\times Y} \chi_G(x,y)\,\mathrm{d}(\lambda\otimes\mu)(x,y) = \int_Y \left(\int_X \chi_G(x,\cdot)\,\mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\mu(y)$$

が成り立つ．これはStep 2.と同様に示されるので，以下に概要のみ与える．まず，σ有限性の定義に現れる互いに素な$X_j \in \mathcal{L}$，$Y_k \in \mathcal{M}$を用いて

$$G = \sum_{j,k=1}^{\infty} G_{jk}; \quad G_{jk} = G \cap (X_j \times Y_k),$$

と分割すれば，$\lambda(X) < \infty$かつ$\mu(Y) < \infty$の場合に帰着される．次に

$$\mathcal{S} = \Big\{ S \in \mathcal{L}\otimes\mathcal{M};\ \int_{X\times Y} \chi_S(x,y)\,\mathrm{d}(\lambda\otimes\mu)(x,y) = \int_Y \left(\int_X \chi_S(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\mu(y) \Big\}$$

とおくと，補題 3.20の条件1.–4.で$\mathfrak{M} = \mathcal{S}$，$\mathcal{I} = \mathcal{L}\times\mathcal{M}$としたものが確かめられ，$\mathcal{L}\otimes\mathcal{M} \subset \mathcal{S}$が示せる．よって主張が従う．

Step 4.　$N \in \mathcal{L}\otimes\mathcal{M}$, $(\lambda\otimes\mu)(N) = 0$とする．このとき，ある$\mu$零集合$N_Y \in \mathcal{M}$が存在して，任意の$y \in Y \setminus N_Y$に対し$\chi_N(\cdot,y)$は$\mathcal{L}$可測かつ

$$\chi_N(\cdot,y) = 0 \quad \lambda\text{-a.e. on } X$$

が成り立つことを示そう．

$\chi_N(\cdot,y)$が$\mathcal{L}$可測であることはStep 1.より従う．また後者は，Step 2.,3.の結果を用いると，

$$0 = \int_Y \left(\int_X \chi_N(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\mu(y)$$

が成り立つことから従う．

Step 5.　補題の主張を示す．$G \in \mathcal{L}\,\overline{\otimes}\,\mathcal{M}$とする．ある$S, T \in \mathcal{L}\otimes\mathcal{M}$で

$$S \subset G \subset T, \quad (\lambda\otimes\mu)(T \setminus S) = 0$$

となるものが存在する．そこで，

$$\chi_G = \chi_S + \chi_{G\setminus S}$$

と分解する．χ_Sに対しては，Steps 1.–3.からTonelliの定理の主張が成立することがわかるので，以下$\chi_{G\setminus S}$について考えよう．

$$0 \le \chi_{G\setminus S} \le \chi_{T\setminus S}$$

およびStep 4.の結果に注意すると，次ようなμ零集合$N_Y \in \mathcal{M}$がとれる: 任意の$y \in Y \setminus N_Y$に対しあるλ零集合$N_y \in \mathcal{L}$をとれば

$$\chi_{G\setminus S}(\cdot,y) = 0 \quad \text{on } X \setminus N_y.$$

すると，$(X,\mathcal{L},\lambda)$の完備性より$\chi_{G\setminus S}(\cdot,y)$は$\mathcal{L}$可測となる．$\chi_{G\setminus S}$に対するTonelliの定理の残りの主張も上の等式から直接従う．　□

定理 3.17の証明. $f\colon X\times Y\to[0,\infty]$を$\mathcal{L}\overline{\otimes}\mathcal{M}$可測関数とする．このとき，$\mathcal{L}\overline{\otimes}\mathcal{M}$可測単関数列$f_n\colon X\times Y\to[0,\infty]$が存在して

$$0\le f_1\le f_2\le\cdots\le f_n\to f\quad\text{as } n\to\infty$$

が成り立つ．補題 3.22により，各f_nに対して定理の主張が成立するので，あとはその極限をとることで，fに関する主張を証明することができる．実際，1.については適当な可算個の零集合の和を除けばよく，また2.,3.については単調収束定理を用いればよい．詳細は省略することにする． □

第4章 Lebesgue空間

§ 4.1 L^p空間

この小節では常に，$(X,\mathcal{B},\mu)$を測度空間とする．任意の$p\in[1,\infty)$に対し，

$$\mathcal{L}^p(X,\mathcal{B},\mu)=\left\{f\colon X\to\overline{\mathbb{C}};\ f\text{は可測で}\int_X|f|^p\,\mathrm{d}\mu<\infty\right\}$$

とおき，$f,g\in\mathcal{L}^p(X,\mathcal{B},\mu)$に対して，

$$f\sim g\quad\overset{\text{def}}{\iff}\quad f=g\ \text{ a.e. on } X$$

と定義する．商空間

$$L^p(X)=L^p(X,\mathcal{B},\mu)=\mathcal{L}^p(X,\mathcal{B},\mu)/\sim$$

をL^p**空間**と呼ぶ．以下，同値類$[f]\in L^p(X,\mathcal{B},\mu)$を代表元$f\in\mathcal{L}^p(X,\mathcal{B},\mu)$と同一視し，単に$f$と書く．任意の$f\in L^p(X,\mathcal{B},\mu)$に対し，

$$\|f\|_p=\|f\|_{L^p}=\left(\int_X|f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$$

をfのL^p**ノルム**と呼ぶ．

- 可測関数$f\colon X\to\overline{\mathbb{C}}$が$X$上で**本質的に有界**であるとは
$$\exists M\ge0\quad\text{s.t.}\quad|f|\le M\quad\text{a.e. on } X$$
が成り立つことである．

- 可測関数$f\colon X\to\overline{\mathbb{C}}$に対し，その**本質的上限**を
$$\operatorname{ess\,sup}|f|=\inf\left\{M\ge0;\ |f|\le M\ \text{ a.e. } x\in X\right\}$$
で定義する．ただし，fが本質的に有界でない場合は，$\operatorname{ess\,sup}|f|=\infty$と定めるものとする．

このとき，任意の可測関数$f\colon X\to\overline{\mathbb{C}}$に対し，

$$|f(x)|\le\operatorname{ess\,sup}|f|\quad\text{for a.e. } x\in X$$

が常に成り立つことに注意する．

集合

$$\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{B},\mu) = \left\{ f\colon X \to \overline{\mathbb{C}};\ f\text{は可測で}\operatorname{ess\,sup}|f| < \infty \right\}$$

に次の同値関係を定める：$f, g \in \mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$ に対して，

$$f \sim g \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad f = g \quad \text{a.e. on } X.$$

商空間

$$L^\infty(X) = L^\infty(X,\mathcal{B},\mu) = \mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{B},\mu)/\sim$$

を L^∞ **空間**と呼ぶ．以下では，同値類 $[f] \in L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$ をその代表元 $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$ と同一視し，単に f と書く．任意の $f \in L^p(X,\mathcal{B},\mu)$ に対し，

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}|f|$$

を f の L^∞ **ノルム**と呼ぶ.

例　$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とする．上に述べた適当な同一視を前提として，単に

$$L^p(\Omega) = \left\{ f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{C}};\ f\text{は Lebesgue 可測で}\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{C}};\ f\text{は Lebesgue 可測で}\operatorname{ess\,sup}|f| < \infty \right\}$$

と表すことが多い.

任意の $p \in [1,\infty]$ に対し，

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \left\{ f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{C}};\ \text{任意の}K \Subset \Omega\text{に対し}f|_K \in L^p(K) \right\}$$

を**局所** L^p **空間**と呼ぶ.

例　可測空間 $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ の上に**数え上げ測度** $\#$ を

$$\#(E) = \sum_{j\in E} 1 = (E\text{の元の個数}) \quad \text{for } E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

で定義する．以下が成り立つことに注意する.

- 任意の関数 $u\colon \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{C}}$ は $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 可測関数である．以下，$u(j) = u_j$ と書いて，関数 u を数列 $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ と同一視する；
- 関数 $u\colon \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{C}}$ が $\#$ 可積分であるためには，絶対収束条件

  $$\sum_{j\in\mathbb{N}} |u_j| < \infty$$

  が必要十分であり，このとき

  $$\int_{\mathbb{N}} u\,\mathrm{d}\# = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j$$

  が成り立つ.

任意の $p \in [1,\infty]$ に対し，

$$\ell^p(\mathbb{N}) = L^p(\mathbb{N},\#)$$

と定める．上に注意したことから，任意の $p \in [1,\infty)$ に対して

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C};\ \sum_{j\in\mathbb{N}} |u_j|^p < \infty \right\}, \quad \|u\|_p = \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |u_j|^p \right)^{1/p}$$

であり，また

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) = \left\{ u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C};\ \sup_{j\in\mathbb{N}} |u_j| < \infty \right\}, \quad \|u\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |u_j|$$

である.

※　同様にして，$\ell^p(\mathbb{Z}) = L^p(\mathbb{Z},\#)$, $p \in [1,\infty]$, なども定義される．特に区別の必要がないときは，まとめて単に ℓ^p と書くこともある.

問　n 点有限集合上で同様の関数空間を考え，$\mathbb{C}^n$ との関係を簡単に考察せよ.

定理 4.1 (Hölderの不等式). $p, q \in [1, \infty]$ は

$$1 \leq p \leq q \leq \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

を満たすとする．ただし，$p = 1$ のときは，$q = \infty$ と解釈するものとする．このとき，任意の $f \in L^p(X)$，$g \in L^q(X)$ に対し，積 fg は μ 可積分であり，

$$\int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

が成り立つ．

証明. $p = 1, q = \infty$ なら

$$\int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \|g\|_\infty \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

なので，主張が成り立つ．

次に，$1 < p \leq q < \infty$ とする．このとき，まず，任意の $a, b \geq 0$ に対して

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{♣}$$

が成り立つことに注意する．実際，$f(a) = a^p/p + b^q/q - ab$ とおくと，$f'(a) = a^{p-1} - b$ より $f(a) \geq f(b^{1/(p-1)}) = 0$ となって (♣) が従う．

$\|f\|_p \|g\|_q = 0$ なら主張は明らかなので，$\|f\|_p \|g\|_q \neq 0$ とする．(♣) より，

$$\begin{aligned}(\|f\|_p \|g\|_q)^{-1} \int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu &\leq \int_X \frac{|f|}{\|f\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_q} \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \frac{1}{p} \|f\|_p^{-p} \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu + \frac{1}{q} \|g\|_q^{-q} \int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\end{aligned}$$

が従う．よって主張が成り立つ． □

系 4.2. $\mu(X) < \infty$ ならば，任意の $1 \leq p \leq q \leq \infty$ に対して

$$L^p(X) \supset L^q(X)$$

が成り立つ．さらに，次の評価が成立する：任意の $f \in L^q(X)$ に対して

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p - 1/q} \|f\|_q.$$

証明. $q = \infty$ の場合は易しいので，$q < \infty$ の場合のみ考える．$f \in L^q(X)$ とすると，Hölderの不等式より

$$\begin{aligned}\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu &\leq \left(\int_X 1 \, \mathrm{d}\mu\right)^{(q-p)/q} \left(\int_X |f|^q \, \mathrm{d}\mu\right)^{p/q} \\ &= \mu(X)^{(q-p)/p} \|f\|_q^p\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $f \in L^p(X)$ である．主張の評価も明らかである． □

※　一般の $(X, \mathcal{B}, \mu)$ に対しては，$L^p(X)$ と $L^q(X)$ の間に包含関係はない．

系 4.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とする．このとき，任意の $1 \leq p \leq q \leq \infty$ に対し

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \supset L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

が成り立つ．

証明. 任意の $K \Subset \Omega$ に対して $f|_K \in L^q(K) \subset L^p(K)$ なので，主張が成り立つ． □

命題 4.4. 任意の $1 \leq p \leq q \leq \infty$ に対して

$$\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$$

が成り立つ．

証明. $p = \infty$ の場合は明らかなので，$p < \infty$ の場合に主張を示す．$u \in \ell^p(\mathbb{N})$ とする．$|u_j| > 1$ となる $j \in \mathbb{N}$ は有限個しかないことに注意すると，

$$\begin{aligned}\|u\|_q^q &= \sum_{|u_j|\le 1} |u_j|^q + \sum_{|u_j|>1} |u_j|^q \le \sum_{|u_j|\le 1} |u_j|^p + \sum_{|u_j|>1} |u_j|^q \\ &= \|u\|_p^p + \sum_{|u_j|>1} |u_j|^q < \infty\end{aligned}$$

となる．したがって，$u \in \ell^q(\mathbb{N})$ である．□

※　緩い言い方をすると，積分が発散する要因は二つあり，それは関数の「局所的な特異性の強さ」と「遠方での増大の強さ（減衰の不十分さ）」である．例えば，$|f|^p$ において，$p \in [1, \infty]$ が大きいほど，前者は強くなり，後者は弱くなることに注意しよう．すると，上のような包含関係が生じる理由を解釈することができる．実際，$\mu(X) < \infty$ となる空間 X では関数の遠方での振る舞いを考慮する必要がない．また，$\ell^p(\mathbb{N})$ は関数に局所的な特異性を許さない関数空間である．

定理 4.5（Minkowskiの不等式）. $p \in [1, \infty]$ とする．このとき，任意の $f, g \in L^p(X)$ に対して，$f + g \in L^p(X)$ であり，さらに

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

が成り立つ．

証明. $p = 1, \infty$ なら主張は明らかなので，$1 < p < \infty$ とする．このとき，任意の $f, g \in L^p(X)$ に対して

$$\begin{aligned}|f(x) + g(x)|^p &\le \Big(|f(x)| + |g(x)|\Big)^p \\ &\le \Big(2 \max\Big\{|f(x)|, |g(x)|\Big\}\Big)^p \\ &\le 2^p \max\Big\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\Big\} \\ &\le 2^p \Big(|f(x)|^p + |g(x)|^p\Big)\end{aligned}$$

なので，$f + g \in L^p(X)$ である．

さらに，Hölderの不等式より，$q = p/(p-1)$ として，

$$\begin{aligned}\|f + g\|_p^p &= \int_X |f(x) + g(x)|^p \, \mathrm{d}\mu \\ &\le \int_X |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| \, \mathrm{d}\mu \\ &\quad + \int_X |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| \, \mathrm{d}\mu \\ &\le \left(\int_X |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/q} \Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big) \\ &= \|f + g\|_p^{p/q} \Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big)\end{aligned}$$

であるので，$\|f + g\|_p \ne 0$ なら上式の両辺を $\|f + g\|_p^{p/q}$ で割ることで主張が従う．$\|f + g\|_p = 0$ なら主張は明らかである．□

※　この定理から $L^p(X)$ は自然な和とスカラー倍に関して線形空間となることが分かる．

§ 4.2 ノルム空間

定義. $\mathbb{C}$-線形空間 V 上の写像 $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ で

1. 任意の $u \in V$ に対し $\|u\| \ge 0$ が成り立つ；
2. $\|u\| = 0$ と $u = 0$ は同値である；
3. 任意の $c \in \mathbb{C}$, $u \in V$ に対し $\|cu\| = |c|\|u\|$ が成り立つ；
4. 任意の $u, v \in V$ に対し $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$（**三角不等式**）が成り立つ；

を満たすものを**ノルム**と呼ぶ．組 $(V, \|\cdot\|)$ を**ノルム空間**と呼ぶ．

※　特に任意の $u, v \in V$ に対し，

$$\Big|\|u\| - \|v\|\Big| \le \|u - v\|$$

が成り立つ．

例　$(X, \mathcal{B}, \mu)$を測度空間とし，$p \in [1, \infty]$とする．このとき，$L^p(X)$は自然な和とスカラー倍に関して線形空間となり，さらにL^pノルム$\|\cdot\|_p$に関してノルム空間となる．(Minkowskiの不等式からすぐに証明できる.)

例　有界閉集合$K \subset \mathbb{R}^n$上の連続関数全体の集合$C(K)$は，自然な和とスカラー倍

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x)$$

によって線形空間となる．さらに

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

によりノルム空間となる．

問　上の$(C(K), \|\cdot\|)$がノルム空間となることを確かめよ．

○ **ノルム空間の自然な距離**

命題 4.6. Vをノルム空間とし，

$$d(u, v) = \|u - v\| \quad \text{for } u, v \in V.$$

とおくと，dはV上の距離である．すなわち，以下が成り立つ：

1. 任意の$u, v \in V$に対し$d(u, v) \geq 0$が成り立つ；
2. $d(u, v) = 0$と$u = v$は同値である；
3. 任意の$u, v \in V$に対し$d(u, v) = d(v, u)$が成り立つ；
4. 任意の$u, v, w \in V$に対し$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$が成り立つ．

証明. ほぼ明らかなので，証明は省略する．□

○ **ノルム空間の位相**

以下，ノルム空間Vには常にdを距離とする距離空間としての位相を考える．すなわち，点列$\{u_j\} \subset V$が$u \in V$に収束するとは

$$\lim_{j \to \infty} \|u - u_j\| = 0$$

が成り立つことであり，これを

$$u = \lim_{j \to \infty} u_j \quad \text{あるいは} \quad u_j \to u \ (j \to \infty)$$

などで表す．

§ 4.3 Banach空間

定義. ノルム空間の点列$\{u_j\} \subset V$が**Cauchy列**であるとは，

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N \geq 0 \ \ \text{s.t.} \ \ \forall j, k \geq N \ \ \|u_j - u_k\| < \epsilon$$

が成り立つことである．

※　ノルム空間の任意の収束列はCauchy列である．実際，$u_j \to u$とすると

$$\|u_j - u_k\| \leq \|u_j - u\| + \|u - u_k\| \to 0$$

が成り立つ．

定義. ノルム空間Vの任意のCauchy列が収束するとき，Vは**完備**であると言う．完備なノルム空間を**Banach空間**と呼ぶ．

定理 4.7. $(X,\mathcal{B},\mu)$を測度空間とし，$p\in[1,\infty]$とする．このとき，$L^p(X)$はBanach空間となる．

証明. $L^p(X)$が完備であることを示せばよい．まず$p<\infty$の場合を考える．$\{f_j\}\subset L^p(X)$をCauchy列とする．このとき，ある部分列$\{f_{j_k}\}$をとって

$$\|f_{j_{k+1}}-f_{j_k}\|_p<\frac{1}{2^k}$$

とできる．実際，Cauchy列であることから$j_1\geq 1$を十分大きくとると

$$j,k\geq j_1 \quad\Rightarrow\quad \|f_j-f_k\|_p<\frac{1}{2}$$

とできる．さらに$j_2>j_1$を十分大きくとって

$$j,k\geq j_2 \quad\Rightarrow\quad \|f_j-f_k\|_p<\frac{1}{2^2}$$

とできる．これを繰り返すと，$\{f_{j_k}\}$が求める部分列となることが分かる．

以下，簡単のため，$\phi_k=f_{j_k}$とおく．関数列$\{g_m\}\subset L^p(X)$を

$$g_1(x)=|\phi_1(x)|,$$
$$g_m(x)=|\phi_1(x)|+\sum_{k=1}^{m-1}\Big|\phi_{k+1}(x)-\phi_k(x)\Big| \quad \text{for } m\geq 2,$$

により定める．任意の$x\in X$に対し，$\{g_m(x)\}\subset\mathbb{R}$は単調増加数列なので，

$$g(x)=\lim_{m\to\infty}g_m(x)\leq\infty$$

が存在する．すると，単調収束定理とMinkowskiの不等式により，

$$\begin{aligned}\int_X|g|^p\,\mathrm{d}\mu&=\lim_{m\to\infty}\int_X|g_m|^p\,\mathrm{d}\mu\\&\leq\lim_{m\to\infty}\left(\|\phi_1\|_p+\sum_{k=1}^{m-1}\|\phi_{k+1}-\phi_k\|_p\right)^p\\&\leq\Big(\|\phi_1\|_p+1\Big)^p<\infty\end{aligned}$$

なので，$g\in L^p(X)$がわかる．特にgはX上ほとんど至るところ有限である．

任意の$m>l$に対し

$$\Big|\phi_m(x)-\phi_l(x)\Big|\leq\sum_{k=l}^{m-1}\Big|\phi_{k+1}(x)-\phi_k(x)\Big|\leq g_m(x)-g_l(x) \qquad (\spadesuit)$$

であり，$\{g_m(x)\}\subset\mathbb{R}$がほとんどすべての$x\in X$でCauchy列であることから，同じ$x\in X$に対して$\{\phi_k(x)\}\subset\mathbb{C}$もCauchy列となり収束する：

$$f(x)=\lim_{k\to\infty}\phi_k(x) \quad \text{a.e. } x\in X$$

と定義する．三角不等式より

$$|f(x)|=\lim_{k\to\infty}|\phi_k(x)|\leq\lim_{k\to\infty}g_k(x)=g(x)$$

なので，$g\in L^p(X)$から$f\in L^p(X)$が従う．

$(\spadesuit)$において$m\to\infty$とすると

$$\Big|f(x)-\phi_l(x)\Big|\leq g(x)-g_l(x)\leq g(x)$$

であり，さらに$\phi_l\to f$ a.e. on Xかつ$g\in L^p(X)$なので，Lebesgue収束定理より

$$\lim_{l\to\infty}\|f-\phi_l\|_p=0,$$

すなわち，$L^p(X)$の位相で$\phi_l\to f$である．

最後に$\{f_j\}$が$f\in L^p(X)$に収束することを示す．任意の$\epsilon>0$に対して

$$\exists N\geq 1 \quad \text{s.t.} \quad \forall j,l>N \quad \|f_j-f_l\|_p<\epsilon$$

である．ここで $l=j_k$ として，$k\to\infty$ とすると

$$\forall j>N \quad \|f_j-f\|_p<\epsilon$$

となり，これは $L^p(X)$ の位相で $f_j\to f$ を意味する．

問　$p=\infty$ のときに定理を示せ．　□

§ 4.4 Hilbert空間

定義. V を $\mathbb{C}$-線形空間とする．写像 $(\cdot,\cdot)\colon V\times V\to\mathbb{C}$ で

1. 任意の $u\in V$ に対し $(u,u)\geq 0$ が成り立つ．
2. $(u,u)=0$ と $u=0$ は同値である．
3. 任意の $u,v\in V$ に対し $(u,v)=\overline{(v,u)}$ が成り立つ．
4. 任意の $a,b\in\mathbb{C}$ と $u,v,w\in V$ に対し $(au+bv,w)=a(u,w)+b(v,w)$ が成り立つ．

を満たすものを**内積**と呼ぶ．組 $(V,(\cdot,\cdot))$ を**内積空間**と呼ぶ．

※　**pre-Hilbert空間**，**前Hilbert空間**などと呼ばれることもある．

例　$(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とする．関数空間 $L^2(X)$ は L^2 **内積**

$$(f,g)=\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)$$

に関して内積空間となる．

特に，$\mathbb{C}^n$ はユニタリ内積

$$(u,v)=\sum_{j=1}^n u_j\overline{v_j}\quad\text{for } u,v\in\mathbb{C}^n$$

に関して内積空間となる．

○ **自然なノルム**

定理 4.8. 内積空間 V において

$$\|u\|=\sqrt{(u,u)};\quad u\in V,$$

はノルムとなる．

※　以下，内積空間では常に自然なノルムから定まる位相を考える．

補題 4.9 (Cauchy–Schwarzの不等式). 任意の $u,v\in V$ に対して

$$|(u,v)|\leq\|u\|\|v\|$$

が成り立つ．

証明. $v=0$なら明らかである．$v\neq 0$として$\alpha=-(u,v)/\|v\|^2$とおくと

$$\begin{aligned}0 &\leq (u+\alpha v, u+\alpha v)\\ &= \|u\|^2+\overline{\alpha}(u,v)+\alpha(v,u)+|\alpha|^2\|v\|^2\\ &= \|u\|^2-|(u,v)|^2/\|v\|^2\end{aligned}$$

なので，求める結論が従う． □

定理 4.8の証明. 三角不等式のみを示す．Cauchy–Schwarzの不等式より

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \|u\|^2+\overline{(u,v)}+(u,v)+\|v\|^2\\ &\leq \|u\|^2+2\|u\|\|v\|+\|v\|^2\\ &= (\|u\|+\|v\|)^2\end{aligned}$$

なので，求める結論が従う． □

○ **中線定理：内積空間の特徴づけ**

定理 4.10. 1. Vを内積空間とすると，任意の$u,v\in V$に対し

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\big(\|u\|^2+\|v\|^2\big) \quad \text{（中線定理）} \qquad (\heartsuit)$$

が成り立つ．

2. Vをノルム空間とする．もし任意の$u,v\in V$に対し$(\heartsuit)$が成り立つなら，

$$(u,v)=\frac{1}{4}\big(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+\mathrm{i}\|u+\mathrm{i}v\|^2-\mathrm{i}\|u-\mathrm{i}v\|^2\big)$$

はVに内積を定め，それが定める自然なノルムはVのノルムと一致する．

証明. 1.　任意の$u,v\in V$に対し

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 &= \|u\|^2+\overline{(u,v)}+(u,v)+\|v\|^2\\ &\quad +\|u\|^2-\overline{(u,v)}-(u,v)+\|v\|^2\\ &= 2\big(\|u\|^2+\|v\|^2\big)\end{aligned}$$

である．

2.　**問**　$(\cdot,\cdot)$が内積の公理を満たすことを確かめよ．

また任意の$u\in V$に対して

$$(u,u)=\frac{1}{4}\big(\|2u\|^2+\mathrm{i}\|(1+\mathrm{i})u\|^2-\mathrm{i}\|(1-\mathrm{i})u\|^2\big)=\|u\|^2$$

なので，2つのノルムは確かに一致する． □

定義. 自然なノルムに関して完備な内積空間を**Hilbert空間**と呼ぶ．

定理 4.11. $(X,\mathcal{B},\mu)$を測度空間とする．

1. $L^2(X)$において，L^2内積から定まるノルムはL^2ノルムに一致する．特に，$L^2(X)$はHilbert空間である．

2. $p\in[1,\infty]\setminus\{2\}$とする．もし互いに素な$E,F\in\mathcal{B}$で$\mu(E),\mu(F)>0$を満たすものが存在するならば，$L^p(X)$上に$L^p$ノルムと両立する内積は存在しない．

証明. 1.　これまでの議論から明らかである.

2.　任意の$a, b \in \mathbb{C}$をとって，$f = a\chi_E$, $g = b\chi_F$とおく．このとき，

$$\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2\Big(|a|^p\mu(E) + |b|^p\mu(F)\Big)^{2/p},$$
$$2\Big(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2\Big) = 2\Big(|a|^2\mu(E)^{2/p} + |b|^2\mu(F)^{2/p}\Big)$$

である．そこで，$\alpha = |a|\mu(E)^{1/p}$, $\beta = |b|\mu(F)^{1/p}$とおくと，L^pノルムと両立する内積が存在するには

$$(\alpha^p + \beta^p)^{1/p} = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$$

が必要である．しかし，これが任意の$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$で成り立つのは$p = 2$のときのみである.　□

第5章 符号付き測度

§ 5.1 符号付き測度とその分解

以下この節では常に，$(X, \mathcal{B})$を可測空間とする.

定義. 関数$\nu\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$が，任意の互いに素な$E_j \in \mathcal{B}$, $j = 1, 2, \ldots,$ に対し

$$\nu\Big(\sum_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j) \quad \text{（完全加法性）}$$

を満たすとき，νを$(X, \mathcal{B})$上の**符号付き測度**と呼ぶ.

※　このとき，$\nu(\emptyset) = \nu(\emptyset) + \nu(\emptyset)$と$\nu(\emptyset) \in \mathbb{R}$から，$\nu(\emptyset) = 0$が従う.

※　同様にして**複素測度**$\nu\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$も定義されるが，その実部Re νおよび虚部Im νはともに符号付き測度となるため，複素測度の性質（の多く）は符号付き測度のそれに帰着される.

定義. 関数$\nu\colon \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$が，

1. $\nu(\mathcal{B}) \subset (-\infty, \infty]$または$\nu(\mathcal{B}) \subset [-\infty, \infty)$,
2. $\nu(\emptyset) = 0$,
3. 任意の互いに素な$E_j \in \mathcal{B}$, $j = 1, 2, \ldots,$ に対し，
$$\nu\Big(\sum_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j) \quad \text{（完全加法性）},$$

を満たすとき，νを$(X, \mathcal{B})$上の**拡張符号付き測度**と呼ぶことにする.

※　条件1. は$\infty - \infty$が現れる可能性を未然に排除している.

※　$\nu \equiv \infty$は条件1.,3. を満たすが，2. を満たさない例となる.

※　同様に，**拡張複素測度**$\nu\colon \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{C}}$を定義することもできる.

例. μ を $(X,\mathcal{B})$ 上の測度とし，$f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ は μ 積分確定とする．このとき，$\nu\colon\mathcal{B}\to\overline{\mathbb{R}}$ を

$$\nu(E)=\int_E f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{for } E\in\mathcal{B}$$

で定めると，ν は $(X,\mathcal{B})$ 上の拡張符号付き測度である．さらに f が μ 可積分であれば，ν は $(X,\mathcal{B})$ 上の符号付き測度である．

問　これを確かめよ．

命題 5.1. ν を $(X,\mathcal{B})$ 上の拡張符号付き測度とする．

1. $E_1,E_2,\ldots\in\mathcal{B}$ かつ $E_1\subset E_2\subset\cdots$ ならば，
$$\lim_{j\to\infty}\nu(E_j)=\nu\Bigl(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\Bigr);$$
2. $E_1,E_2,\ldots\in\mathcal{B}$，$E_1\supset E_2\supset\cdots$ かつ $\nu(E_1)\neq\pm\infty$ ならば，
$$\lim_{j\to\infty}\nu(E_j)=\nu\Bigl(\bigcap_{j=1}^{\infty}E_j\Bigr).$$

証明. 命題 2.7 と同様に示すことができるので，証明は省略する．$\square$

定義. ν を $(X,\mathcal{B})$ 上の拡張符号付き測度とし，$E\in\mathcal{B}$ とする．

1. $F\in\mathcal{B}$ かつ $F\subset E$ なら $\nu(F)\geq 0$ が成り立つとき，E を ν **正集合**と呼ぶ．
2. $F\in\mathcal{B}$ かつ $F\subset E$ なら $\nu(F)\leq 0$ が成り立つとき，E を ν **負集合**と呼ぶ．
3. E が ν 正集合かつ ν 負集合であるとき，E を ν **零集合**と呼ぶ．

※　$E\in\mathcal{B}$ が正集合なら，任意の $F\subset E$，$F\in\mathcal{B}$ は正集合である．負集合，零集合についても同様である．

※　$E_j\in\mathcal{B}$ が正集合なら，$\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\in\mathcal{B}$ は正集合である．負集合，零集合についても同様である．

定理 5.2 (Hahn 分解). ν を $(X,\mathcal{B})$ 上の拡張符号付き測度とする．このとき，ある正集合 $P\in\mathcal{B}$ とある負集合 $N\in\mathcal{B}$ が存在して

$$X=P\cup N,\quad P\cap N=\emptyset$$

が成り立つ．また，このような分解は ν 零集合の違いを除いて一意的である．すなわち，$P',N'\in\mathcal{B}$ が同じ条件を満たすなら，

$$P\ominus P':=(P\setminus P')\cup(P'\setminus P),\quad N\ominus N':=(N\setminus N')\cup(N'\setminus N)$$

はともに ν 零集合である．

証明. 必要ならνを$-\nu$で置き換えて，$\nu(\mathcal{B}) \subset [-\infty, \infty)$としてよい．

Step 1.　まず，Hahn分解がν零集合の違いを除いて一意であることを示す．2つのHahn分解

$$X = P + N = P' + N'$$

があったとする．このとき，$P \cup P'$は正集合，$N \cup N'$は負集合であり，

$$P \ominus P' \subset P \cup P' \quad \text{かつ} \quad P \ominus P' \subset N' \cup N$$

なので，$P \ominus P'$はν零集合である．$N \ominus N'$についても同様である．

Step 2.　正集合$P \in \mathcal{B}$の候補を以下のように構成する：

$$\beta = \sup\Big\{\nu(E);\ E \in \mathcal{B}\text{は正集合}\Big\} \qquad (\spadesuit)$$

とおき，正集合$E_j \in \mathcal{B}$を$j \to \infty$のとき$\nu(E_j) \to \beta$となるようにとって，

$$P = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

とおく．$\emptyset \in \mathcal{B}$は正集合なので，$(\spadesuit)$の右辺の集合は空でないことに注意する．

このとき，E_jは正集合であることから，Pも正集合である．また，

$$\beta \geq \nu(P) = \nu(P \setminus E_j) + \nu(E_j) \geq \nu(E_j) \to \beta \quad \text{as } j \to \infty$$

なので，$\nu(P) = \beta$であることにも注意しておく．

Step 3.　あとは$N := X \setminus P$が負集合となることを示せばよい．そこで，Nは負集合でないと仮定する．

以下では，$Q \subset N$かつ$\nu(Q) > 0$を満たす正集合$Q \in \mathcal{B}$を構成しよう．実際，このようなQがとれれば

$$P + Q\text{は正集合} \quad \text{かつ} \quad \nu(P + Q) = \nu(P) + \nu(Q) > \nu(P) = \beta$$

となり，これはβの定義に矛盾する．

さて仮定より，$E \subset N$かつ$\nu(E) > 0$を満たす$E \in \mathcal{B}$が存在する．もしEが正集合なら$Q = E$ととればよいので，Eは正集合ではないとしてよく，

$$\gamma_1 := \inf\Big\{\nu(R);\ R \in \mathcal{B},\ R \subset E\Big\} < 0$$

としてよい．$n_1 \in \mathbb{N}$と$R_1 \in \mathcal{B}$を

$$-\frac{1}{n_1 - 1} \leq \gamma_1 < -\frac{1}{n_1}, \quad \nu(R_1) < -\frac{1}{n_1}, \quad R_1 \subset E$$

ととる．もし$E \setminus R_1 \in \mathcal{B}$が正集合なら$Q = E \setminus R_1$ととればよいので，$E \setminus R_1$は正集合ではないとしてよく，

$$\gamma_2 := \inf\Big\{\nu(R);\ R \in \mathcal{B},\ R \subset E \setminus R_1\Big\} < 0$$

としてよい．$n_2 \in \mathbb{N}$と$R_2 \in \mathcal{B}$を

$$-\frac{1}{n_2 - 1} \leq \gamma_2 < -\frac{1}{n_2}, \quad \nu(R_2) < -\frac{1}{n_2}, \quad R_2 \subset E \setminus R_1$$

ととる．以上を繰り返して，$j \geq 2$に対し

$$\gamma_j := \inf\Big\{\nu(R);\ R \in \mathcal{B},\ R \subset E \setminus \sum_{k=1}^{j-1} R_k\Big\} < 0$$

として，$n_j \in \mathbb{N}$ と $R_j \in \mathcal{B}$ を

$$-\frac{1}{n_j - 1} \le \gamma_j < -\frac{1}{n_j}, \quad \nu(R_j) < -\frac{1}{n_j}, \quad R_j \subset E \setminus \sum_{k=1}^{j-1} R_k$$

ととることができる．今，

$$Q = E \setminus \Big(\sum_{j=1}^{\infty} R_j \Big)$$

とおこう．

このとき，$E \subset N$ から $Q \subset N$ である．また

$$\nu(E) = \nu(Q) + \sum_{j=1}^{\infty} \nu(R_j) \qquad (\heartsuit)$$

なので，$\nu(R_j) < 0$ に注意すると

$$0 < \nu(E) < \nu(Q)$$

が分かる．最後に Q が正集合であることを示そう．$(\heartsuit)$ と $\nu(Q) < \infty$ より

$$-\infty < \sum_{j=1}^{\infty} \nu(R_j) < -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j}$$

なので，$n_j \to \infty$ となることに注意しておく．任意の $S \subset Q$ をとると，任意の k に対し $S \subset E \setminus \sum_{j=1}^{k-1} R_j$ なので，

$$-\frac{1}{n_k - 1} \le \gamma_k \le \nu(S)$$

であり，よって $\nu(S) \ge 0$ である．したがって確かに Q は正集合である． □

定理 5.3（**Jordan 分解**）**.** ν を $(X, \mathcal{B})$ 上の拡張符号付き測度とする．このとき，ある $(X, \mathcal{B})$ 上の測度 $\nu_\pm$ で以下を満たすものが一意的に存在する：

1. $\nu = \nu_+ - \nu_-$；
2. 任意の Hahn 分解 $X = P + N$ に対し，$\nu_+(N) = \nu_-(P) = 0$.

さらに，$\nu_\pm$ は以下の表示を持つ：$X = P + N$ を任意の Hahn 分解とする．任意の $E \in \mathcal{B}$ に対して

$$\nu_+(E) = \nu(E \cap P) = \sup\Big\{\nu(F);\ F \in \mathcal{B},\ F \subset E\Big\},$$
$$\nu_-(E) = -\nu(E \cap N) = -\inf\Big\{\nu(F);\ F \in \mathcal{B},\ F \subset E\Big\}.$$

※　$\nu_\pm$ をそれぞれ ν の**正変動/負変動**と呼ぶ．このとき，

$$|\nu| = \nu_+ + \nu_-$$

は $(X, \mathcal{B})$ 上の測度である．$|\nu|$ を ν の**全変動**と呼ぶ．

証明.（**存在**）　Hahn 分解 $X = P + N$ を一つとって，$E \in \mathcal{B}$ に対して

$$\nu_+(E) = \nu(E \cap P), \quad \nu_-(E) = -\nu(E \cap N)$$

と定める．$\nu_\pm$ が $(X, \mathcal{B})$ 上の測度であることは容易に確かめられる．また任意の $E \in \mathcal{B}$ に対して

$$\nu(E) = \nu(E \cap P) + \nu(E \cap N) = \nu_+(E) - \nu_-(E)$$

が成り立つ．さらに $X = P' + N'$ を Hahn 分解とすると $N' \cap P$, $P' \cap N$ はともに零集合であるから

$$\nu_+(N') = \nu(N' \cap P) = 0, \quad \nu_-(P') = -\nu(P' \cap N) = 0$$

が成り立つ．よって上の $\nu_\pm$ は Jordan 分解を与えることが示された．

（**一意性**）　$\nu = \nu_+ - \nu_-$ をJordan分解とする．$X = P + N$ をHahn分解とすると，任意の $E \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{aligned}\nu_+(E) &= \nu_+(E \cap P) + \nu_+(E \cap N) \\ &= \nu_+(E \cap P) \\ &= \nu_+(E \cap P) - \nu_-(E \cap P) \\ &= \nu(E \cap P)\end{aligned}$$

でなければならない．よって，ν_+ は一意的に定まる．ν_- についても同様に議論できる．

（**表示公式**）　第1表示公式は上の議論ですでに得られているので，第2表示公式を示す．Hahn分解 $X = P + N$ を一つとる．任意の $E \in \mathcal{B}$ をとる．このとき，$E \cap P \in \mathcal{B}$ かつ $E \cap P \subset E$ なので，

$$\nu_+(E) = \nu(E \cap P) \leq \sup\Big\{\nu(F);\ F \in \mathcal{B},\ F \subset E\Big\}$$

が成り立つ．一方，任意の $F \in \mathcal{B}$ で $F \subset E$ となるものに対して

$$\nu(F) = \nu_+(F) - \nu_-(F) \leq \nu_+(F) \leq \nu_+(E)$$

なので，

$$\sup\Big\{\nu(F);\ F \in \mathcal{B},\ F \subset E\Big\} \leq \nu_+(E)$$

が成立する．よって，以上から

$$\nu_+(E) = \sup\Big\{\nu(F);\ F \in \mathcal{B},\ F \subset E\Big\}$$

である．ν_- についても同様なので，証明は省略する．　□

例　μ を $(X, \mathcal{B})$ 上の測度とし，$f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ は μ 積分確定とする．$(X, \mathcal{B})$ 上の拡張符号付き測度 ν を

$$\nu(E) = \int_E f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{for } E \in \mathcal{B}$$

で定める（以前の例を参照）と，以下が成り立つ．（確認は**問**とする．）

- X の ν に関するHahn分解 $X = P + N$（のひとつ）は
  $$P = \Big\{x \in X;\ f(x) \geq 0\Big\}, \quad N = \Big\{x \in X;\ f(x) < 0\Big\}$$
  で与えられる．（もちろん $f = 0$ となる点の集合は N に含めてもよい．）

- ν の正変動 ν_+，負変動 ν_- および全変動 $|\nu|$ は，
  $$\nu_\pm(E) = \int_E f_\pm\,\mathrm{d}\mu, \quad |\nu|(E) = \int_E |f|\,\mathrm{d}\mu \quad \text{for } E \in \mathcal{B}$$
  で与えられる．

§ 5.2 Radon–Nikodymの定理

定義. μ, ν を $(X, \mathcal{B})$ 上の拡張符号付き測度とする．

1. ν が μ に関して**絶対連続**であるとは，任意の $E \in \mathcal{B}$ に対し
   $$|\mu|(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\nu|(E) = 0$$
   が成り立つことである．このとき，$|\nu| \ll |\mu|$ と書く．

2. μ と ν が互いに**特異**であるとは，ある $E, F \in \mathcal{B}$ が存在して
   $$X = E \cup F, \quad E \cap F = \emptyset, \quad |\mu|(F) = |\nu|(E) = 0$$
   が成り立つことである．このとき，$\mu \perp \nu$ と書く．（※ 条件は μ と ν について対称だが，「ν は μ に関して特異」という言い方をすることもある．）

問　$|\nu| \ll |\mu|$ かつ $\mu \perp \nu$ なら，$\nu \equiv 0$ であることを示せ．

例　μを$(X,\mathcal{B})$上の測度とし，$f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$は$\mu$積分確定とする．$(X,\mathcal{B})$上の拡張符号付き測度$\nu$を

$$\nu(E)=\int_E f\,\mathrm{d}\mu\quad\text{for } E\in\mathcal{B}$$

で定めると，$|\nu|\ll\mu$が成り立つ.

例　$(\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{R}),\mu)$をLebesgue測度空間とする．$(\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{R}))$上の測度$\nu$を

$$\nu(E)=\#(E\cap\mathbb{Z})$$

で定義すると，$\mu\perp\nu$が成り立つ.

例　νを$(X,\mathcal{B})$上の拡張符号付き測度とし，$\nu=\nu_+-\nu_-$をそのJordan分解とする．このとき，$\nu_+\perp\nu_-$が成り立つ.

定理 5.4（**Radon–Nikodymの定理**）**.** μを$(X,\mathcal{B})$上のσ有限測度とし，νを$(X,\mathcal{B})$上の拡張符号付き測度とする．もし$|\nu|\ll\mu$ならば，あるμ積分確定な$f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$が存在して

$$\nu(E)=\int_E f\,\mathrm{d}\mu\quad\text{for } E\in\mathcal{B}\tag{$\spadesuit$}$$

が成り立つ．また，$g\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$も同じ条件を満たすなら，

$$f=g\quad\mu\text{-a.e. on } X$$

が成り立つ.

※　上のfをνのμに関する**Radon–Nikodym導関数**（**密度関数**）と呼び，

$$f=\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$$

で表す.

証明. μのσ有限性により，$\mu(X)<\infty$としてよい.

Step 1.　まず，一意性を示す．$f,g\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$は$\mu$積分確定で

$$\nu(E)=\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\int_E g\,\mathrm{d}\mu\quad\text{for } E\in\mathcal{B}$$

を満たしているとする．f,gの対称性から

$$f\le g\quad\mu\text{-a.e. on } X$$

を示せば十分である．そのために，任意の$n,k\in\mathbb{N}$に対して

$$E=X\Big(f\ge g+\frac{1}{n}\Big)\cap X(g<k)$$

とおく．このとき，

$$\nu(E)=\int_E f\,\mathrm{d}\mu\ge\int_E\Big(g+\frac{1}{n}\Big)\,\mathrm{d}\mu=\nu(E)+\frac{1}{n}\mu(E)$$

であるが，一方で

$$\nu(E)=\int_E g\,\mathrm{d}\mu\le k\mu(E)\le k\mu(X)<\infty$$

に注意すると，$\nu(E)$を移項できて，$\mu(E)=0$が従う．よって，$n,k\in\mathbb{N}$が任意であったことを順々に用いると，

$$f\le g\quad\mu\text{-a.e. on } X(g<\infty)$$

がわかる．$X(g=\infty)$上では当然

$$f\le g$$

が成り立つので，以上を合わせて主張が従う.

Step 2.　次に f の候補を構成する．Jordan 分解を考えることで，$\nu \geq 0$ の場合に構成すれば十分である．

任意の $q \in \mathbb{Q}$ に対し $\nu_q = \nu - q\mu$ とおく．これは拡張符号付き測度である．このとき，ν_q に関する Hahn 分解 $X = P_q + N_q$ で

$$q \in \mathbb{Q},\ q \leq 0 \quad \Rightarrow \quad P_q = X,\ N_q = \emptyset$$

かつ

$$q, r \in \mathbb{Q},\ q < r \quad \Rightarrow \quad P_q \supset P_r,\ N_q \subset N_r$$

を満たすものが存在することを示す．

各 $q \in \mathbb{Q}$ に対し，ν_q に関する Hahn 分解 $X = P'_q + N'_q$ を任意に固定する．ただし，$q \leq 0$ に対しては，はじめから

$$P'_q = X, \quad N'_q = \emptyset$$

としてよい．今，任意の $q < r$ に対し $Z_{q,r} = P'_r \setminus P'_q = N'_q \setminus N'_r$ とおくと，

$$0 \geq \nu_q(Z_{q,r}) = \nu(Z_{q,r}) - q\mu(Z_{q,r}),$$
$$0 \leq \nu_r(Z_{q,r}) = \nu(Z_{q,r}) - r\mu(Z_{q,r})$$

が成り立つので，$\mu(Z_{q,r}) < \infty$ に注意して

$$r\mu(Z_{q,r}) \leq \nu(Z_{q,r}) \leq q\mu(Z_{q,r})$$

である．これから $\mu(Z_{q,r}) = 0$，$\nu(Z_{q,r}) = 0$ が順次従い，特に任意の $s \in \mathbb{Q}$ に対し $\nu_s(Z_{q,r}) = 0$ となる．そこで，P'_s, N'_s を ν_s 零集合 $Z_{q,r}$ で修正して，

$$P_s = P'_s \cup Z, \quad N_s = N'_s \setminus Z; \qquad Z = \bigcup_{q,r \in \mathbb{Q}, q<r} Z_{q,r},$$

とおけば，これが主張の Hahn 分解を与えることがすぐにわかる．

さて，上の Hahn 分解 $X = P_q + N_q$ を用いて，関数 $f\colon X \to [0,\infty]$ を

$$f(x) = \sup\left\{q \in \mathbb{Q};\ x \in P_q\right\}$$

で定義しよう．

Step 3.　Step 2. の f が (♠) を満たすことを示す．任意の $\alpha > 0$ に対して

$$X(f > \alpha) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}, q > \alpha} P_q \in \mathcal{B}$$

なので，f は可測関数であることに注意しておく．

任意の $E \in \mathcal{B}$ をとる．任意の $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$ に対して，

$$E_{k/n} = E \cap P_{k/n} \cap N_{(k+1)/n}, \qquad E_\infty = E \cap \left(\bigcap_{k=0}^{\infty} P_{k/n}\right)$$

とおいて，E を

$$E = \left(\sum_{k=0}^{\infty} E_{k/n}\right) + E_\infty$$

のように分割する．

もし $\mu(E_\infty) > 0$ なら，任意の $k \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$0 \leq \nu_{k/n}(E_\infty) = \nu(E_\infty) - \frac{k}{n}\mu(E_\infty)$$

であることから，

$$\nu(E) \geq \nu(E_\infty) \geq \frac{k}{n}\mu(E_\infty) \to \infty \quad \text{as } k \to \infty$$

である．一方，E_∞ 上で $f = \infty$ であることに注意すると，

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu \geq \int_{E_\infty} f\,\mathrm{d}\mu \geq \infty$$

である．よって (♠) が成り立つ．

次に $\mu(E_\infty) = 0$ とする．このとき，$E_{k/n} \subset P_{k/n} \cap N_{(k+1)/n}$ より，

$$\nu_{k/n}(E_{k/n}) \geq 0, \quad \nu_{(k+1)/n}(E_{k/n}) \leq 0$$

なので，

$$\frac{k}{n}\mu(E_{k/n}) \le \nu(E_{k/n}) \le \frac{k+1}{n}\mu(E_{k/n})$$

である．一方，$E_{k/n}$上で$k/n \le f < (k+1)/n$であることに注意すると，

$$\frac{k}{n}\mu(E_{k/n}) \le \int_{E_{k/n}} f\,\mathsf{d}\mu \le \frac{k+1}{n}\mu(E_{k/n})$$

である．これらを合わせると

$$\left|\nu(E_{k/n}) - \int_{E_{k/n}} f\,\mathsf{d}\mu\right| \le \frac{1}{n}\mu(E_{k/n})$$

となる．$\nu \ll \mu$より$\nu(E_\infty) = 0$となることにも注意して，上の不等式を$k = 1, 2, \ldots, \infty$について足し合わせると，完全加法性と単調収束定理から

$$\left|\nu(E) - \int_E f\,\mathsf{d}\mu\right| \le \frac{1}{n}\mu(E)$$

を得る．これが任意の$n \in \mathbb{N}$に対して成立することから(♠)が従う． □

定義. νを$(X, \mathcal{B})$上の拡張符号付き測度，$f\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$を$\mathcal{B}$可測関数とする．$f$が$|\nu|$可積分のとき，

$$\int_X f\,\mathsf{d}\nu = \int_X f\,\mathsf{d}\nu_+ - \int_X f\,\mathsf{d}\nu_-$$

と定義する．(fは自動的に$\nu_\pm$可積分となることに注意する．)

系 5.5. μを$(X, \mathcal{B})$上のσ有限測度，νを$(X, \mathcal{B})$上の拡張符号付き測度とし，$|\nu| \ll \mu$とする．また，$f\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$を$\mathcal{B}$可測関数とする．$f$が$|\nu|$可積分となるためには，$f(\mathsf{d}\nu/\mathsf{d}\mu)$が$\mu$可積分となることが必要十分である．さらにこのとき

$$\int_X f\,\mathsf{d}\nu = \int_X f\frac{\mathsf{d}\nu}{\mathsf{d}\mu}\,\mathsf{d}\mu$$

が成り立つ．

証明. fが$|\nu|$可積分となるためには$|f|$が$|\nu|$可積分となることが必要十分であり，また$f(\mathsf{d}\nu/\mathsf{d}\mu)$が$\mu$可積分となるためには$|f||\mathsf{d}\nu/\mathsf{d}\mu|$が$\mu$可積分となることが必要十分である．ここで，

$$\frac{\mathsf{d}|\nu|}{\mathsf{d}\mu} = \left|\frac{\mathsf{d}\nu}{\mathsf{d}\mu}\right| \quad \mu\text{-a.e. on } X$$

となることに注意する．実際，任意の$E \in \mathcal{B}$に対して

$$\begin{aligned}|\nu|(E) &= \nu_+(E) + \nu_-(E)\\ &= \int_E \left(\frac{\mathsf{d}\nu}{\mathsf{d}\mu}\right)_+ \mathsf{d}\mu + \int_E \left(\frac{\mathsf{d}\nu}{\mathsf{d}\mu}\right)_- \mathsf{d}\mu\\ &= \int_E \left|\frac{\mathsf{d}\nu}{\mathsf{d}\mu}\right| \mathsf{d}\mu\end{aligned}$$

である．すると結局，主張の証明は$f \ge 0$，$\nu \ge 0$，$\mathsf{d}\nu/\mathsf{d}\mu \ge 0$の場合に帰着されることがわかる．

さて，fの任意の単関数近似列

$$0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_n \to f \quad \text{as } n \to \infty$$

をとると，簡単な計算により

$$\int_X f_n\,\mathsf{d}\nu = \int_X f_n\frac{\mathsf{d}\nu}{\mathsf{d}\mu}\,\mathsf{d}\mu$$

が成り立つことが分かる．ここで$n \to \infty$として，(積分の定義および）単調収束定理を用いると

$$\int_X f\,\mathsf{d}\nu = \int_X f\frac{\mathsf{d}\nu}{\mathsf{d}\mu}\,\mathsf{d}\mu$$

が得られる．よって主張が従うことが分かった． □

定理 5.6 (Lebesgue分解). μを$(X,\mathcal{B})$上のσ有限測度，νを$(X,\mathcal{B})$上の拡張符号付き測度とし，$|\nu|$はσ有限とする．このとき，$(X,\mathcal{B})$上の拡張符号付き測度$\nu_{\mathsf{ac}},\nu_{\mathsf{s}}$が一意的に存在して

$$\nu=\nu_{\mathsf{ac}}+\nu_{\mathsf{s}},\quad |\nu_{\mathsf{ac}}|\ll\mu,\quad \nu_{\mathsf{s}}\perp\mu$$

が成り立つ．

証明. Step 1.　ある高々可算個の互いに素な$X_j\in\mathcal{B}$で

$$X=\sum_j X_j,\quad \mu(X_j)<\infty,\quad |\nu|(X_j)<\infty$$

を満たすものが存在する．実際，$Y_k,Z_l\in\mathcal{B}$を

$$X=\sum_k Y_k=\sum_l Z_l,\quad \mu(Y_k)<\infty,\quad |\nu|(Z_l)<\infty$$

となるようにとって，$Y_k\cap Z_l$を並べたものをX_jとすればよい．

Step 2.　Lebesgue分解の一意性を示す．2つのLebesgue分解

$$\nu=\nu_{\mathsf{ac}}+\nu_{\mathsf{s}}=\nu'_{\mathsf{ac}}+\nu'_{\mathsf{s}}$$

が存在したとする．このとき，任意の$E\in\mathcal{B}$に対して

$$\nu_{\mathsf{ac}}(E\cap X_j)-\nu'_{\mathsf{ac}}(E\cap X_j)=\nu'_{\mathsf{s}}(E\cap X_j)-\nu_{\mathsf{s}}(E\cap X_j)$$

である．この両辺はμに関して絶対連続かつ特異な符号付き測度となるので，恒等的に0であり，結局

$$\nu_{\mathsf{ac}}(E\cap X_j)=\nu'_{\mathsf{ac}}(E\cap X_j),\quad \nu_{\mathsf{s}}(E\cap X_j)=\nu'_{\mathsf{s}}(E\cap X_j)$$

でなければならない．ここでjについて和をとると，完全加法性から

$$\nu_{\mathsf{ac}}(E)=\nu'_{\mathsf{ac}}(E),\quad \nu_{\mathsf{s}}(E)=\nu'_{\mathsf{s}}(E)$$

が得られる．これからLebesgue分解の一意性が従う．

Step 3.　Lebesgue分解の存在を示す．νのJordan分解を考えることで，$\nu\geq 0$の場合に示せば十分である．

$\lambda=\mu+\nu$とおくと，λはσ有限測度かつ$\nu\ll\lambda$なので，非負値のRadon–Nikodym導関数$f:=\mathsf{d}\mu/\mathsf{d}\lambda$が存在する．ここで，任意の$E\in\mathcal{B}$に対して

$$\int_E \mathsf{d}\nu=\nu(E)=\int_E f\,\mathsf{d}\lambda=\int_E f\,\mathsf{d}\mu+\int_E f\,\mathsf{d}\nu\geq\int_E f\,\mathsf{d}\nu \qquad (\heartsuit)$$

なので，定理 5.4の証明のStep 1.と同様に議論することで，はじめから$0\leq f\leq 1$としてよい．さて，Xを

$$X=F+G;\quad F=X(f<1),\ G=X(f=1)$$

と分解して，任意の$E\in\mathcal{B}$に対して

$$\nu_{\mathsf{ac}}(E)=\int_{E\cap F}\frac{f}{1-f}\,\mathsf{d}\mu,\quad \nu_{\mathsf{s}}(E)=\nu(E\cap G)$$

と定める．これらがνのLebesgue分解を与えることを確かめる．

ν_{ac}とν_{s}が測度であることは明らかである．また，任意の$E\in\mathcal{B}$に対して

$$\nu(E)=\nu(E\cap F)+\nu(E\cap G)=\sum_j\nu(E\cap X_j\cap F)+\nu_{\mathsf{s}}(E)$$

と書ける．ここで，系 5.5を繰り返し用いれば，任意の$n\in\mathbb{N}$に対し

$$\begin{aligned}
&\nu(E\cap X_j\cap F)\\
&=\int_{E\cap X_j\cap F}f\,\mathsf{d}\mu+\int_{E\cap X_j\cap F}f\,\mathsf{d}\nu\\
&=\int_{E\cap X_j\cap F}f\,\mathsf{d}\mu+\int_{E\cap X_j\cap F}f^2\,\mathsf{d}\mu+\int_{E\cap X_j\cap F}f^2\,\mathsf{d}\nu\\
&=\cdots\\
&=\int_{E\cap X_j\cap F}\frac{f-f^{n+1}}{1-f}\,\mathsf{d}\mu+\int_{E\cap X_j\cap F}f^n\,\mathsf{d}\nu
\end{aligned}$$

が成り立ち，$n \to \infty$ とすると，Lebesgue収束定理により

$$\nu(E \cap X_j \cap F) = \int_{E \cap X_j \cap F} \frac{f}{1-f} \, \mathsf{d}\mu = \nu_{\mathsf{ac}}(E \cap X_j)$$

となる．以上により，分解

$$\nu(E) = \nu_{\mathsf{ac}}(E) + \nu_{\mathsf{s}}(E)$$

が示された．

さて今，$\nu_{\mathsf{ac}} \ll \mu$ は明らかなので，$\nu_{\mathsf{s}} \perp \mu$ を示そう．まず，

$$\nu_{\mathsf{s}}(F) = \nu(F \cap G) = 0$$

である．また，$G = X(f = 1)$ に注意して $(\heartsuit)$ を用いると，

$$\nu(G \cap X_j) = \int_{G \cap X_j} f \, \mathsf{d}\mu + \int_{G \cap X_j} f \, \mathsf{d}\nu = \mu(G \cap X_j) + \nu(G \cap X_j)$$

である．ここで $\nu(G \cap X_j) < \infty$ を移項すれば，

$$\mu(G \cap X_j) = 0$$

であり，さらに j に関して和をとると，完全加法性から

$$\mu(G) = 0$$

を得る．よって，$\nu_{\mathsf{s}} \perp \mu$ が示された． $\square$