常微分方程式論入門 講義スライド

担当教員：伊藤健一

2026年1月15日版

この講義について

内容： 主に具体例を通じて，常微分方程式に対する基本的な取り扱いを学ぶ．なお，一部を除いて厳密性はそれほど気にしない．

参考書： 矢嶋信男「常微分方程式」（岩波書店）
笠原晧司「微分方程式の基礎」（朝倉書店）
柳田英二，栄伸一郎「常微分方程式論」（朝倉書店）
俣野博「常微分方程式入門—基礎から応用へ」（岩波書店）

第1章 導入

§ 1.1 動機付け

定義. 一変数関数 $y = y(x)$ とその導関数 $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ の間の「関係式」

$$F\Big(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\Big) = 0$$

を**常微分方程式**あるいは単に**微分方程式**と呼ぶ．英語表記 Ordinary Differential Equation の頭文字をとって **ODE** と呼ぶこともある．

例. 関数 $y = y(x)$ について，適当に作った関係式

$$y + \frac{y''}{x^2} - 4xy'^2\cos(y'''') = 0$$

は常微分方程式である．

注意． 1．多変数関数とその偏導関数の間の関係式は**偏微分方程式**と呼ばれる．英語表記 Partial Differential Equation の頭文字をとって **PDE** と呼ばれることもある．例えば，関数 $u = u(t, x, y, z)$ に対し，**熱方程式**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

は偏微分方程式である．

2．微分方程式という呼称は常微分方程式と偏微分方程式の総称として用いられることもある．

3．常微分方程式と偏微分方程式では解析の手法が大きく異なる．本講では偏微分方程式は扱わない．

○ **現象を記述する微分方程式**

例. 放射性元素は一定時間に一定の確率で崩壊することが知られている．時刻 t における放射性元素の個数を $n = n(t)$ とし，微小時間 Δt の間の元素の崩壊率を $\gamma \Delta t$，個数の増分を Δn とすると，

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\Delta n}{\Delta t} = -\gamma n \qquad \therefore\ n' = -\gamma n. \tag{♠}$$

が成り立つ．ここで n は十分大きく，連続変数とみなせるとした（例えば，個数の単位として mol を用いれば最小幅は $(6.02 \times 10^{23})^{-1}$ 程度である）．

解法 1．$n(t) \equiv 0$ は (♠) を満たす．また $n(t) \neq 0$ となる t の範囲では，

$$\frac{n'}{n} = -\gamma \qquad \therefore\ \log|n| = -\gamma t + C \qquad \therefore\ n = \pm \mathrm{e}^C \mathrm{e}^{-\gamma t} =: C' \mathrm{e}^{-\gamma t}$$

を得る．C' は**任意定数**と呼ばれる．$n(t) \equiv 0$ は $C' = 0$ に対応する． □

解法 2．(♠) の両辺に $\mathrm{e}^{\gamma t}$ をかけると，

$$\mathrm{e}^{\gamma t} n' = -\gamma \mathrm{e}^{\gamma t} n \qquad \therefore\ (\mathrm{e}^{\gamma t} n)' = 0 \qquad \therefore\ \mathrm{e}^{\gamma t} n = C \qquad \therefore\ n = C \mathrm{e}^{-\gamma t}$$

を得る．ここで C は任意定数である．このようにすれば 0 での割り算の場合分けを避けられる． □

注意． 1．**初期値** $n(0) = n_0$ を与えれば任意定数 C が一意に定まって，

$$n = n_0 \mathrm{e}^{-\gamma t}$$

となる．なお，元素数が半分になるまで時間は**半減期**と呼ばれ，初期数 n_0 によらない．上の記号で半減期は $t_{1/2} = \gamma^{-1} \log 2$ である．

2．任意定数 C を動かすことで，$\mathbb{R}^2$ 内に**解曲線** $n = C\mathrm{e}^{-\gamma t}$ の族が得られる．初期値を与えて C を決定することは，対応する初期点を通過する解曲線を選び出すことに対応する．

例（Malthus モデル）. 理想的な環境下では生物の個体数の増加速度はその時点の個体数に比例する（**Malthus の法則**）．よって時刻 t における個体数を $n = n(t)$，比例定数を μ とすれば

$$n' = \mu n$$

が成り立つ．これは直前の例と同様に解けて，初期値 $n(0) = n_0$ を与えれば，

$$n = n_0 \mathrm{e}^{\mu t}.$$

が従う．

例（ロジスティック方程式）. Malthus モデルは個体数が際限なく指数的に増加していく点で非現実的である．個体数がその環境に収容できる最大個体数 K に近づくにつれ，増加率が低下するよう修正したモデル方程式として

$$n' = \mu\Big(1 - \frac{n}{K}\Big)n$$

がある．K は**環境収容力**と呼ばれる．

例（Newton方程式）. 質量mの粒子の時刻tにおける位置を$\boldsymbol{x}(t)$とし，またその粒子に働く力を$\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))$とすると，

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))$$

が成り立つ．ただし時間微分をドットで表した．基本的な状況を列挙する．

1. **自由運動**は$\boldsymbol{F} = (0, 0, 0)$で記述される．
2. **自由落下**は$\boldsymbol{F} = (0, 0, -mg)$で記述される．
3. **大気中の落下**は$\boldsymbol{F} = (0, 0, -mg) - k\dot{\boldsymbol{x}}$で記述される．
4. **調和振動子**は$\boldsymbol{F} = -K\boldsymbol{x}$で記述される．

一般にNewton方程式は3つの互いに絡み合った方程式からなる**常微分方程式系**であるが，上に挙げた例では3つの独立な方程式に帰着する．

§ 1.2 基本用語

定義. 常微分方程式

$$F\Big(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\Big) = 0. \qquad (\heartsuit)$$

に対し，以下のように用語を定める．

1. xを**独立変数**，yを**従属変数**または**未知関数**と呼ぶ．
2. nを$(\heartsuit)$の**階数**と呼ぶ．$(\heartsuit)$はn**階**であるとも言う．
3. $(\heartsuit)$を満たす関数$y = y(x)$を$(\heartsuit)$の**解**と呼ぶ．さらに
   (a) n個の任意定数を含む解を**一般解**と呼ぶ．
   (b) 一般解のうちで任意定数を特定の数に指定したものを**特殊解**あるいは**特解**と呼ぶ（一般解の特別な場合）．
   (c) 一般解に含まれない解を**特異解**と呼ぶ．

4. $(\heartsuit)$のすべての解を求めることを$(\heartsuit)$を**解く**または**積分する**と言う．
5. $(\heartsuit)$の解で

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \qquad (\diamondsuit)$$

   を満たすものを求める問題を**初期値問題**と呼ぶ．ここで$x_0, y_0, \dots, y_{n-1}$は与えられた数である．$(\diamondsuit)$を**初期値**，**初期条件**または**初期データ**と呼ぶ．

注意. 緩い言い方をすると，n階の常微分方程式を解くにはn回積分する必要があり，その際にn個の積分定数が現れる．これらが一般解に含まれるn個の任意定数に対応する．また，これらの任意定数を一意に決定するためにはn個の（独立な）初期値が必要となる．

○ **正規型**

定義. 常微分方程式が未知関数の最高階導関数について解けているとき，すなわち

$$y^{(n)} = f\Big(x, y, \dots, y^{(n-1)}\Big) \qquad (\clubsuit)$$

の形であるとき，この方程式は**正規型**であると呼ばれる．

注意. 1. **Lipschitz条件**（後述）の下で，正規型常微分方程式$(\clubsuit)$の初期値問題は一意解を持つ．これについては第6章で議論する．

2. 正規型常微分方程式(♣)は常に1階の正規型常微分方程式系に書き換えられる．実際,

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \ldots, \quad y_n = y^{(n-1)}$$

とおけば,

$$y_1' = y_2, \quad \ldots, \quad y_{n-1}' = y_n, \quad y_n' = f(x, y_1, \ldots, y_n)$$

と書き換えられる．またさらに，ベクトル値関数

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n), \quad \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) = (y_2, \ldots, y_n, f(x, y_1, \ldots, y_n))$$

を導入すれば,

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \tag{♠}$$

とも書ける．

命題 1.1. $y = y(x)$ を1階正規型常微分方程式

$$y' = f(x, y) \tag{♣}$$

の解とする．このとき，対応する $\mathbb{R}^2$ 内の**解曲線**（あるいはグラフ）

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto (x, y(x)) \tag{♡}$$

は，$\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (x, y) \mapsto (1, f(x, y)) \tag{◇}$$

に接する．

注意. すなわち，1階正規型常微分方程式(♣)を解くことは，対応するベクトル場(◇)に接する曲線族を求めることに他ならない．

証明. 解曲線のパラメータ表示(♡)をパラメータ x で微分すればよい． □

問. $y' = 2y$ に対しその解曲線族の概形を図示し，命題 1.1の主張を確かめよ．

問. 前々項の1階正規型常微分方程式系(♠)に対し命題 1.1と同様の主張を書き下し，それを示せ．

○ **正規型だが解が一意ではない例**

例. 初期問題

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y(x_0) = y_0$$

は，$y_0 = 0$ のとき解を無数に持つ．実際，与えられた方程式は（初期条件を無視すれば）特異解

$$y(x) = 0$$

と，一般解

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \le C, \\ (x - C)^2 & \text{for } x \ge C \end{cases}$$

を持つ．ここで C は任意定数である．このことから上の主張がすぐに従う．

問. 上の特異解と一般解を図示し，$y_0 = 0$ のとき実際に解が無数に存在することを確かめよ．

注意． 1．上の方程式は正規型だが，Lipschitz 条件（後述）を満たさない．（方程式自身の持つ平方根の特異性が，解の一意性を崩していると見てよい．）

2. 上の初期値問題は，$y_0 > 0$ なら一意解を持ち，$y_0 < 0$ なら解を持たないことも示せる．
3. 上の方程式は**変数分離型**（後述）であり，初等的に解くことができる．
4. 上の特異解は一般解の包絡線になっていることにも注意する．

○ **非正規型**

一般に，非正規型常微分方程式の初期値問題では，方程式自体に特異性が無くても解の一意性は期待できない．

例. 初期値問題

$$y'^2 - 2y'y - 3y^2 = 0, \quad y(x_0) = y_0$$

を考える．与えられた方程式は

$$(y' - 3y)(y' + y) = 0 \quad \therefore\ y' = 3y \ \text{ or } \ y' = -y$$

と書き換えられるため，2つの一般解

$$y = C\mathrm{e}^{3x}, \quad y = D\mathrm{e}^{-x} \quad (C, D\,\text{は任意定数})$$

を持つ．このことから $y_0 \neq 0$ に対し常に2つの解を持つことが分かる．

注意． 1．上の初期値問題において解の一意性が成り立たない理由は，方程式が本質的に2つの方程式からなるため，と言える．

2. 上の方程式の一般解を求めることは，2つベクトル場

$$(x, y) \mapsto (1, 3y), \quad (x, y) \mapsto (1, -y)$$

のいずれかに接する曲線族を求めることに対応する．初期点からどちらのベクトル場に沿って曲線を伸ばしていくかに応じて2つの解曲線が現れる．

問. 上の2つのベクトル場および解曲線族の概形を図示せよ．

問. 初期値問題

$$y'^2 - 4y = 0, \quad y(x_0) = y_0$$

を考える．$-\infty \le C \le D \le \infty$ を満たす任意の定数 C, D に対し，関数

$$y(x) = \begin{cases} (x - C)^2 & \text{for } x \le C, \\ 0 & \text{for } C < x < D, \\ (x - D)^2 & \text{for } x \ge D \end{cases}$$

は上の微分方程式の解であることを確かめよ．特にこのことから，$y_0 \ge 0$ のとき，上の初期値問題は無数に解を持つことを確かめよ．

注意． 1．$C = -\infty$ のとき，$x \le C$ の場合分けには意味がないので無視することにする．$C = D$ や $D = \infty$ のときも同様に解釈する．

2. 上の微分方程式は $y' = \pm 2\sqrt{y}$ と書き直せる．このことから2つ前の例と同様の注意が（一部修正して）この場合にも適用される．

第２章 １階方程式の初等解法（求積法）

§ 2.1 変数分離型

定義. 次の形の常微分方程式を**変数分離型**と呼ぶ：

$$y' = f(x)g(y).$$

解法. $g(b) = 0$を満たすbがあれば，$y(x) \equiv b$が解となることはすぐに分かる．また，$g(y) \neq 0$となる範囲では，形式的に

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

と書き，これにさらに積分記号を形式的に付けて

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

とすれば解が求まる． □

正当化（もう少し詳しく）．上で議論で形式的だった部分を正当化する．曖昧さを無くすために初期値$y(x_0) = y_0$を設定しておく．もし$y(x)$が解であるならば，$g(y(x)) \neq 0$となるxの範囲において

$$\frac{1}{g(y(x))}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = f(x)$$

が成り立つ．これを変数xについてx_0からxまで積分すると，

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(y(x))}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

であり，さらに左辺で置換積分を行うと

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

が従う．よって正当化がなされた． □

例題. aを与えられた定数として，常微分方程式

$$y' = ay$$

を解け．

解. 前章でも同じ形の方程式を扱ったが，改めて変数分離型として解いてみる．まず$y(x) \equiv 0$は解である．また$y \neq 0$となる範囲においては

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int a\,\mathrm{d}x$$

であり，これより

$$\log|y| = ax + C \qquad \therefore\ y = C'\mathrm{e}^{ax}$$

が従う．ただし$C' = \pm\mathrm{e}^{C}$とした． □

注意. 左辺の積分の積分変数はxではなくyである．慣れないうちは誤解することがよくあるので注意せよ．

例題. μ, K を与えられた定数として，ロジスティック方程式

$$y' = \mu y\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

を解け．また，解曲線族を図示せよ．

解. まず $y \equiv 0, K$ は解である．また $y \neq 0, K$ となる範囲においては

$$\int \frac{K\,\mathrm{d}y}{y(K-y)} = \int \mu\,\mathrm{d}x$$

であり，これより

$$\log\left|\frac{y}{K-y}\right| = \mu x + C \qquad \therefore\ y = \frac{C'K\mathrm{e}^{\mu x}}{1 + C'\mathrm{e}^{\mu x}}$$

を得る．ただし $C' = \pm\mathrm{e}^{C}$ とした．曲線族の図は省略する． □

注意. 1．解 $y \equiv 0$ は $C' = 0$ に対応し，特異解ではない．同様に，解 $y \equiv K$ は $C' = \infty$ に対応すると見ることができ，特異解とはみなされない．実際，上の解表示において $C'' = 1/C'$ とおけば

$$y = \frac{K\mathrm{e}^{\mu x}}{C'' + \mathrm{e}^{\mu x}}$$

と書け，確かに $y \equiv K$ は $C'' = 0$ に対応している．

2．解曲線族の図から以下のことが分かる．$x \to \infty$ のとき，

(a) $y \equiv 0$ 以外の任意の解曲線は $y \equiv 0$ から離れる．

(b) 任意の正値解の解曲線は $y \equiv K$ に近づく．

これらのことから $y \equiv 0, K$ はそれぞれ**不安定解**，**安定解**と呼ばれる．

§ 2.2 同次型

定義. 次の形の常微分方程式を**同次型**と呼ぶ：

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

解法. 未知関数を y から $z = y/x$ に変換すると変数分離型に帰着する．実際，このとき

$$z + xz' = f(z) \qquad \therefore\ z' = \frac{f(z) - z}{x}$$

である．よって $f(b) = b$ を満たす b があれば，$z \equiv b$，あるいは

$$y = bx \tag{$\diamondsuit$}$$

は解である．また $z \neq b$ となる範囲では

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

により解が求まる．$(f(z) - z)^{-1}$ の原始関数の一つを $F(z)$ とすると，

$$\mathrm{e}^{F(y/x)} = Cx \tag{$\heartsuit$}$$

を得る．ここで C は任意定数である． □

注意. 常微分方程式の解は必ずしも $y = y(x)$ の形に書く必要はなく，x と y の関係式（できれば簡素な）が得られた段階で終了としても良い．

定理 2.1. $y(x)$ を同次型常微分方程式

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (\spadesuit)$$

の解とする．このとき，任意の $\alpha \neq 0$ に対し $\alpha y(x/\alpha)$ も $(\spadesuit)$ の解となる．よって特に $(\spadesuit)$ の解曲線族は原点を中心とした拡大縮小に対し不変である．

証明. $z(x) = \alpha y(x/\alpha)$ とおくと，

$$z'(x) = y'\left(\frac{x}{\alpha}\right) = f\left(\frac{y(x/\alpha)}{x/\alpha}\right) = f\left(\frac{z(x)}{x}\right)$$

が成り立つ．よって主張は示された． □

注意. 前項の解の表示式 $(\diamondsuit)$ および $(\heartsuit)$ からも証明できる．

例題. 常微分方程式

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

を解け．また解曲線族を図示せよ．

解. 与えられた方程式は

$$y' = \frac{1 + (y/x)^2}{2y/x}$$

と書き直すことができる．これは同次型である．よって $z = y/x$ とおくと

$$z' = \frac{1 - z^2}{2xz}$$

となり，変数分離型に帰着された．まず $z \equiv \pm 1$，すなわち $y = \pm x$ は解である．また $z \neq \pm 1$ となる範囲では

$$\int \frac{2z\,\mathrm{d}z}{1 - z^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \therefore\ -\log|1 - z^2| = \log|x| + C$$

から解が求まる．任意定数を $\pm\mathrm{e}^{-C} = 2A$ と置き直して，整理すると

$$1 - z^2 = \frac{2A}{x} \qquad \therefore\ (x - A)^2 - y^2 = A^2$$

を得る（$y = \pm x$ もこれに含まれる）．解曲線族の図は省略する． □

注意. より一般に

$$y' = f\left(\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_ny^n}{b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \cdots + b_ny^n}\right) = f\left(\frac{\text{同次}\,n\,\text{次多項式}}{\text{同次}\,n\,\text{次多項式}}\right)$$

も同次型である．

例. 常微分方程式

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right), \qquad aB - bA \neq 0,$$

は同次型に帰着できる．実際，

$$a\alpha + b\beta + c = 0, \quad A\alpha + B\beta + C = 0$$

を満たす α, β を求めて，$X = x - \alpha$, $Y = y - \beta$ とおくと

$$Y' = f\left(\frac{aX + bY}{AX + BY}\right) = f\left(\frac{a + b(Y/X)}{A + B(Y/X)}\right)$$

と書き直せる．

問. 上の例において，$aB - bA = 0$ の場合には変数分離型に帰着できることを確かめよ．

§ 2.3 線形方程式

定義. 次の形の常微分方程式を**線形方程式**と呼ぶ：

$$y' + p(x)y + q(x) = 0. \qquad (\clubsuit)$$

また，$q(x) \equiv 0$ のとき $(\clubsuit)$ は**斉次**であると言い，そうでないとき $(\clubsuit)$ は**非斉次**であると言う．

注意. 1. 非斉次項 $q(x)$ があるため $(\clubsuit)$ は y, y' に関して完全には線形でないが，q が x のみに依るなら線形の枠組みで扱えるため，線形と呼ばれる．一方，q が未知関数 y やその微分に依存する場合には，もやは線形ではなく非線形である．

2. 斉次の代わりに**同次**という用語を用いることもあるが，同次型と紛らわしいので本講では用いない．

解法 1. $P(x)$ を $p(x)$ の原始関数の一つとして，$\mathrm{e}^{P(x)}$ を $(\clubsuit)$ にかけると

$$\left(\mathrm{e}^{P(x)}y\right)' = -q(x)\mathrm{e}^{P(x)}$$

と書き換えられる．よって両辺を積分して整理すれば，

$$y = -\mathrm{e}^{-P(x)} \int q(x)\mathrm{e}^{P(x)}\,\mathrm{d}x$$

を得る． □

注意. $P(x)$ を $p(x)$ と積分記号を使って表せば

$$y = -\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

とも書けるが，この表示は複数の積分定数を含むようにも見えるため，注意が必要である（実際には $\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ と $\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ の積分定数が相殺する）．次の解法では初期値を与えて，この表示をもう少し丁寧に見てみる．

解法 2（初期値がある場合にもう少し丁寧に）．ここでは初期値

$$y(x_0) = y_0$$

を設定して解く．$(\clubsuit)$ の両辺に $\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$ をかけると

$$\left(\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}y\right)' = -q(x)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$$

となる．初期値に注意して，これを x_0 から x まで積分すると

$$\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}y - y_0 = -\int_{x_0}^{x} q(\eta)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{\eta} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\eta$$

となるので，結局

$$y = y_0\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi} - \int_{x_0}^{x} q(\eta)\mathrm{e}^{-\int_{\eta}^{x} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\eta$$

が従う． □

注意. 解法 2 の解表示において，$q \equiv 0$ とすれば右辺第 1 項は対応する斉次方程式の解であることが分かる．一方，$y_0 = 0$ とすれば右辺第 2 項は $(\clubsuit)$ の特殊解である．つまり,「非斉次解＝斉次解＋特殊解」の形になっている．

問. 1. $q \equiv 0$ のとき，$(\clubsuit)$ を変数分離型として解き，一般解は

$$y = C\mathrm{e}^{-P(x)}$$

で与えられることを示せ．ここで $P(x)$ は $p(x)$ の原始関数の一つである．

2. （**定数変化法**）1 の結果から，一般の q の場合には $(\clubsuit)$ は

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-P(x)}$$

の形の解を持つと予想される．これを $(\clubsuit)$ に代入して計算することで，$C(x)$ を求めよ．

例題. m, g, kを正定数とする．大気中の落下速度を記述する初期値問題

$$m\dot{v} = mg - kv, \quad v(0) = v_0$$

を解き，**終端速度** $v_\infty = \lim_{t\to\infty} v$ を求めよ．また解曲線族の概形を図示せよ．

解. 方程式は$\dot{v} + (k/m)v = g$と書き直せるので，これに$\mathrm{e}^{kt/m}$をかけて

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{kt/m}v) = g\mathrm{e}^{kt/m} \quad \therefore\ v = \frac{mg}{k} + C\mathrm{e}^{-kt/m}$$

となる．よって初期値を考慮することで，

$$v = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt/m} \quad \text{および} \quad v_\infty = \frac{mg}{k}$$

を得る．解曲線族の図は省略する．□

注意. 変数分離型としても解ける．

§ 2.4 Bernoulli型とRiccati型

定義. 次の形の常微分方程式を**Bernoulliの方程式**と呼ぶ：

$$y' + p(x)y + q(x)y^k = 0, \quad k \neq 0, 1.$$

注意. 斉次線形部分と，最も単純な非線形項である**べき型非線形項**からなる方程式である．非線形方程式だが変数変換により線形方程式に帰着できる．

解法. まず$k > 0$のとき$y \equiv 0$は解である．また任意の$k \neq 0, 1$に対し，$y \neq 0$となる範囲では両辺をy^kで割ることで

$$(1-k)^{-1}(y^{1-k})' + p(x)y^{1-k} + q(x) = 0$$

となる．よって$z = y^{1-k}$とおけば

$$z' + (1-k)p(x)z + (1-k)q(x) = 0$$

となり，線形方程式へ帰着される．□

定義. 次の形の常微分方程式を**Riccatiの方程式**と呼ぶ：

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0.$$

注意. 1. y'がyの2次式と一致する方程式，あるいは，非斉次項付き線形部分と2次のべき型非線形項からなる方程式と見れる．

2. Riccatiの方程式は一般には初等的に求積できないことが知られているが，特殊解が一つ見つかれば，そこからの「ずれ」を計算して解ける．

解法. 特殊解y_0が一つ見つかったとする．このとき，与えられた方程式と

$$y_0' + py_0^2 + qy_0 + r = 0$$

の辺々で差を取って，$z = y - y_0$とおくと

$$z' + p(z + 2y_0)z + qz = 0 \quad \therefore\ z' + (2py_0 + q)z + pz^2 = 0$$

となる．したがってBernoulli型に帰着された．□

例題. 常微分方程式

$$y' - 3y^2 - \frac{y}{x} + 12x^2 = 0$$

を解け．

解. 試行錯誤により，与えられた方程式は$y_0 = 2x$を特殊解に持つことが分かる．実際，

$$(2x)' - 3(2x)^2 - \frac{2x}{x} + 12x^2 = 0$$

である．与えられた方程式とこれとで辺々を引いて，$z = y - 2x$とおくと

$$z' - 3(z + 4x)z - \frac{z}{x} = 0 \quad \therefore\ z' - \left(12x + \frac{1}{x}\right)z - 3z^2 = 0$$

となる．これはBernoulli型である．まず$z \equiv 0$は解であるが，これは$y = y_0 = 2x$ に他ならない．また$z \neq 0$となる範囲では，さらに$w = z^{-1}$とお

くことで

$$w' + \left(12x + \frac{1}{x}\right)w + 3 = 0$$

となる．これは線形方程式である．よって $x\mathrm{e}^{6x^2}$ をかけて，整理すると

$$\left(x\mathrm{e}^{6x^2}w\right)' = -3x\mathrm{e}^{6x^2} \qquad \therefore\ w = \frac{1}{x\mathrm{e}^{6x^2}}\left(C - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{6x^2}\right)$$

を得る．あとは変数を元に戻していくことで，

$$z = \frac{4x\mathrm{e}^{6x^2}}{4C - \mathrm{e}^{6x^2}} \qquad \therefore\ y = 2x + \frac{4x\mathrm{e}^{6x^2}}{4C - \mathrm{e}^{6x^2}}$$

を得る． □

注意. 解 $y_0 = 2x$ は $C = \infty$ に対応する．

§ 2.5 完全微分型

方程式 $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ を形式的に

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{$\spadesuit$}$$

と書き，x, y について対称に見ることにする．

定義. 方程式 (♠) が**完全微分型**であるとは，ある $\Phi = \Phi(x,y)$ が存在して

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

が成り立つことである．

定理 2.2. 方程式 (♠) が完全微分型ならば，その一般解は，上の Φ を用いて

$$\Phi(x,y) = C \tag{$\heartsuit$}$$

で与えられる．ここで C は任意定数である．

証明. 形式的には，(♡) を全微分して

$$0 = \mathrm{d}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\mathrm{d}y = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

を得る．もう少し厳密に議論すると，$y = y(x)$ を (♡) から定まる関数とすれば，

$$\Phi(x, y(x)) = C$$

が成り立つ．この両辺を x で微分して

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x,y(x)) \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) \\ &= P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) \end{aligned}$$

を得る． □

定理 2.3. (♠) が完全微分型であるための必要十分条件は，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{$\diamondsuit$}$$

が成り立つことである．

証明. まず，(♠) が完全微分型であれば，その定義より

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

が成り立つ．逆に (◇) が成り立つとき，a, b を任意に固定して

$$\Phi(x,y) = \int_a^x P(s,b)\,\mathrm{d}s + \int_b^y Q(x,t)\,\mathrm{d}t$$

とおくと，これは完全微分型の定義の条件を満たす．実際，直接計算により

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= P(x,b) + \int_b^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= P(x,b) + \int_b^y \frac{\partial P}{\partial y}(x,t)\,\mathrm{d}t = P(x,y), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= Q(x,y)\end{aligned}$$

が従う． □

注意. 十分性の証明時に，Φ の表示公式も得られていることに注意する．より一般には，定点 (a,b) を予め固定しておいて，任意の (x,y) に対し (a,b) から (x,y) へ至る任意の曲線 γ をとって

$$\Phi(x,y) = \int_\gamma \Big(P(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi + Q(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\eta\Big)$$

と定めてもよい．実際，条件 $(\diamondsuit)$ はこの線積分が (x,y) のみに依り，γ の選び

方には依らないことを保証している（**Stokesの定理**を参照）．なお，定義より，γ のパラメータ表示 $(\xi(t),\eta(t))$，$t \in [t_0,t_1]$，を用れば，上の線積分は

$$\Phi(x,y) = \int_{t_0}^{t_1} \Big(P(\xi(t),\eta(t))\frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t} + Q(\xi(t),\eta(t))\frac{\mathrm{d}\eta(t)}{\mathrm{d}t}\Big)\,\mathrm{d}t$$

となる．上の証明ではこれを計算し易くなるような特別な γ を選んだ．

問. 定理 2.3 の $(\diamondsuit)$ を仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}\Phi_1(x,y) &= \int_a^x P(s,y)\,\mathrm{d}s + \int_b^y Q(a,t)\,\mathrm{d}t, \\ \Phi_2(x,y) &= \int_0^1 \Big[(x-a)P\Big(a+t(x-a), b+t(y-b)\Big) \\ &\qquad + (y-b)Q\Big(a+t(x-a), b+t(y-b)\Big)\Big]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

はともに完全微分型の定義の条件を満たすことを直接計算により確かめよ．

例題. 常微分方程式 $(ax+by)\,\mathrm{d}x + (bx+cy)\,\mathrm{d}y = 0$ を解け．ただし a,b,c は定数とする．

解. $P_y = b = Q_x$ なので，これは完全微分型である．Φ の形は簡単に計算できて，一般解は

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2 = C$$

で与えられる． □

例題. 常微分方程式 $(y+\cos x)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$ を解け．

解. $P_y = 1 = Q_x$ なので，これは完全微分型である．Φ の形は簡単に計算できて，一般解は

$$\Phi(x,y) = xy + \sin x = C$$

で与えられる． □

○ **積分因子**

定義. 関数 $\mu = \mu(x,y)$ が本節冒頭の方程式 $(\spadesuit)$ の**積分因子**であるとは，

$$(\mu P)\,\mathrm{d}x + (\mu Q)\,\mathrm{d}y = 0$$

が完全微分型となることである．

定理 2.4. μ が $(\spadesuit)$ の積分因子となるための必要十分条件は，

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x, \quad \text{すなわち} \quad \mu(P_y - Q_x) = \mu_x Q - \mu_y P$$

が成り立つことである．

証明. 定理 2.3 からすぐに従う． □

注意. 一般の場合に積分因子を見つけるのは不可能であるが，以下では積分因子が見つかるような特殊な場合をいくつか見る．

○ **積分因子が１変数のみに依存する場合**

命題 2.5. 本節冒頭の方程式(♠)に対し，以下が成り立つ．

1. xのみに依存する積分因子$\mu = \mu(x)$が存在するための必要十分条件は，$(P_y - Q_x)/Q$がxのみの関数となることである．さらにこのとき，
$$\mu = \exp\left[\int \frac{P_y - Q_x}{Q}\,\mathrm{d}x\right]$$
ととれる．
2. yのみに依存する積分因子$\mu = \mu(y)$が存在するための必要十分条件は，$(Q_x - P_y)/P$がyのみの関数となることである．さらにこのとき，
$$\mu = \exp\left[\int \frac{Q_x - P_y}{P}\,\mathrm{d}y\right]$$
ととれる．

証明．１と２は同様に示せるので，１のみを示す．必要十分性は命題 2.5 からすぐに分かる．またこのとき，
$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$$
が成り立つので，
$$\mu = \exp\left[\int \frac{P_y - Q_x}{Q}\,\mathrm{d}x\right]$$
ととれることが分かる． □

例題. 常微分方程式$\left(x^2 - 2xy^3\right)\mathrm{d}x + 3x^2y^2\,\mathrm{d}y = 0$を解け.

解．直接計算により
$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-6xy^2 - 6xy^2}{3x^2y^2} = -\frac{4}{x}$$
となるので，命題 2.5 より積分因子$\mu = x^{-4}$がとれる．実際，
$$\mu\left[\left(x^2 - 2xy^3\right)\mathrm{d}x + 3x^2y^2\,\mathrm{d}y\right] = \left(x^{-2} - 2x^{-3}y^3\right)\mathrm{d}x + 3x^{-2}y^2\,\mathrm{d}y$$
は完全微分型であり，したがって解は
$$-x^{-1} + x^{-2}y^3 = C$$
である． □

○ **積分因子の形をある程度予想できる場合**

例題. 常微分方程式$\left(y^3 + y^2\right)\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = 0$を解け.

解．積分因子として$\mu = x^m y^n$の形の関数を仮定すると，
$$(\mu P)_y = (n+3)x^m y^{n+2} + (n+2)x^m y^{n+1},$$
$$(\mu Q)_x = (m+1)x^m y^{n+1}$$
なので，$n = -3$，$m = -2$，すなわち$\mu = x^{-2}y^{-3}$ととれる．このとき，
$$\mu\left[\left(y^3 + y^2\right)\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y\right] = \left(x^{-2} + x^{-2}y^{-1}\right)\mathrm{d}x + x^{-1}y^{-2}\,\mathrm{d}y$$
は確かに完全微分型であり，したがって解は
$$x^{-1} + x^{-1}y^{-1} = C$$
である． □

○ **初等解法と積分因子**

これまでの初等解法は積分因子の方法の特別な場合と見ることができる．

例. 変数分離型の方程式 $y' = f(x)g(y)$ を

$$f(x)g(y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

の形に書くと，

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = -\frac{g'(y)}{g(y)}$$

は y のみの関数である．よって命題 2.5 より積分因子を $\mu = \mu(y) = g(y)^{-1}$ ととれて，このとき，

$$\mu\Big[f(x)g(y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y\Big] = f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$$

は確かに完全微分型である．したがって解は

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = 0$$

で与えられる．ただし任意定数は不定積分の積分定数に込めて省略した．

注意. もし命題 2.5 の公式をそのまま用いるなら，本来は $\mu = |g(y)|^{-1}$ とすべきだが，実際には任意の解 $y = y(x)$ に対し $g(y(x))$ は符号を変えないので，$\mu = g(y)^{-1}$ としても問題は無い．実際，もし $g(y(x))$ が符号を変えたとすると，その瞬間 $y(x)$ は $g(b) = 0$ となる b を値にとるが，$y \equiv b$ 自体も解なので，解の一意性の下ではそのようなことは起こりえない．

問. 同次形方程式 $y' = f(y/x)$ を積分因子の方法で解け．

例. 線形方程式 $y' + p(x)y + q(x) = 0$ を

$$(p(x)y + q(x))\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$$

の形に書くと，

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = p(x)$$

は x のみの関数である．よって，$P(x)$ を $p(x)$ の原始関数の一つとすれば，命題 2.5 より積分因子を $\mu = \mu(x) = \mathrm{e}^{P(x)}$ ととれる．このとき，

$$\mu\Big[(p(x)y + q(x))\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\Big] = \Big(p(x)y\mathrm{e}^{P(x)} + q(x)\mathrm{e}^{P(x)}\Big)\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{P(x)}\mathrm{d}y$$

は確かに完全微分型である．したがって解は

$$y\mathrm{e}^{P(x)} + \int q(x)\mathrm{e}^{P(x)}\,\mathrm{d}x = 0$$

で与えられる．ただし任意定数は不定積分の積分定数に込めて省略した．

§ 2.6 Clairaut 型と Lagrange 型（d'Alembert 型）

○ **準備：包絡線**

定義. 曲線 Γ が τ をパラメータとする曲線族 $\{\Gamma_\tau\}_\tau$ の**包絡線**であるとは，任意の τ に対しある点で Γ と Γ_τ が接することである．

定理 2.6. τ をパラメータとする曲線族 $\{f(x, y, \tau) = 0\}_\tau$ に対し，その包絡線 Γ のパラメータ表示 $(x(t), y(t))$ は

$$f(x(t), y(t), t) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau}(x(t), y(t), t) = 0$$

から定まる．よって特に Γ の方程式は

$$f(x, y, t) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau}(x, y, t) = 0$$

から t を消去することで得られる．

証明. τを動かしたとき，Γと$f(x,y,\tau)=0$の接点は，Γ上をτに関して滑らかに動くとしてよい．これによりΓをτでパラメータ付けることができる．それを$(x(\tau),y(\tau))$とすると，まずこれが$f(x,y,\tau)=0$上にあることから

$$f(x(\tau),y(\tau),\tau)=0$$

が成り立つ．またこれをτで微分すると，

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} f(x(\tau),y(\tau),\tau) \\ &= x'(\tau)\frac{\partial f}{\partial x}(x(\tau),y(\tau),\tau) + y'(\tau)\frac{\partial f}{\partial y}(x(\tau),y(\tau),\tau) \\ &\qquad + \frac{\partial f}{\partial \tau}(x(\tau),y(\tau),\tau) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \tau}(x(\tau),y(\tau),\tau) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで$(x'(\tau),y'(\tau))$は$(x(\tau),y(\tau))$におけるΓの接ベクトルであり，したがって同じ点における$f(x,y,\tau)=0$の接ベクトルでもあること，および，$(f_x(x,y),f_y(x,y))$は(x,y)における$f(x,y,\tau)=0$の法ベクトルであることを用いた． □

例題. τをパラメータとする曲線族$\left\{y=3\tau^2x-2\tau^3\right\}_\tau$の包絡線の方程式を求めよ．

解. 定理 2.6 より，包絡線の方程式は

$$y=3t^2x^2-2t^3, \quad 0=6tx-6t^2$$

からtを消去することで得られる．実際にtを消去して，$y=x^3$を得る． □

○ **Clairautの方程式**

定義. 次の形の常微分方程式を**Clairautの方程式**と呼ぶ：

$$y=xy'+f(y'). \tag{♣}$$

注意. 以下に見るように，Clairautの微分方程式では初期値問題の解の一意性が成立しない例を系統的に構成でき，その点で理論上重要である．このことから当然，一般には非正規型となる．

解法. (♣)の両辺をxで微分すると

$$y'=y'+xy''+f'(y')y'' \quad \therefore\ y''\big(x+f'(y')\big)=0$$

となり，これから以下の３種類の解が得られる．

I. $y''=0$のとき，$y'=C$（任意定数）としてよく，これを(♣)に代入すると，一般解

$$y=Cx+f(C) \tag{♠}$$

が得られる．

II. $x+f'(y')=0$のとき，これを$y'=f'^{-1}(-x)$と解き直し，(♣)に代入すると，特異解

$$y=xf'^{-1}(-x)+f(f'^{-1}(-x)) \tag{♡}$$

が得られる．また(♡)は(♠)から定まる直線族の包絡線を与える．

III. さらに，(♠)と(♡)が定める解曲線を接点でつないで得られる曲線も(♣)の解曲線となる． □

注意. 1. 特異解 (♡) の解曲線は，パラメータ t を用いて

$$x = -f'(t), \quad y = -tf'(t) + f(t)$$

のようにパラメータ表示できる．このことは，上のパラメータ表示から t を消去して (♡) となることを確かめるか，本質的に同じことであるが，(♡) を求める際に用いた関係式

$$x + f'(y') = 0, \quad y = xy' + f(y')$$

において y' を t に置き換えることで示される．

2. (♡) が (♠) から定まる直線族の包絡線を与えることは，(♠) に定理 2.6 を適用して上のパラメータ表示と見比べればわかる．

3. (♠) と (♡) が定める解曲線は接点において接しているため，そこで曲線を乗り換えてできる曲線も微分可能である．このことから，(♠) と (♡) を乗り継いで別の解を構成することができ，一般に初期値問題の解の一意性が成立しない．

例題. 常微分方程式

$$y = xy' - \frac{1}{4}y'^2$$

を解け．

解. 与えられた方程式はClairaut型であるが，ここでは変数変換により直接解いてみる．$z = -y + x^2$ とおくと

$$z'^2 - 4z = 0$$

となる．この方程式の解は $z = (x - C)^2$，$z = 0$ およびこれらを接点でつないだものである（第１章最後の問も参照せよ）．したがって，与えられた方程式の解は

$$y = 2Cx - C^2, \quad y = x^2,$$

および，これらを接点でつないだものである．なお，上の後者が前者の包絡線となっていることは，接線の方程式を直接計算しても確かめられる． □

○ Lagrangeの方程式（d'Alembertの方程式）

定義. 次の形の常微分方程式を**Lagrangeの方程式**または**d'Alembertの方程式**と呼ぶ：

$$y = xg(y') + f(y'). \qquad (♡)$$

ただし $g(y') \neq y'$ とする．

注意. これはClairautの微分方程式の一般化とみることができる．

解法. (♡) を x で微分して，$p = y'$ とおくと，

$$p - g(p) - (xg'(p) + f'(p))p' = 0 \qquad (◇)$$

となる．これから以下の２種類の解が得られる．

I. もし $p_0 - g(p_0) = 0$ を満たす p_0 があれば，$p \equiv p_0$ は (◇) の解である．これを (♡) に代入して，解

$$y = p_0 x + f(p_0)$$

を得る．

II. 次に $p - g(p) \neq 0$ となる範囲で考える．$p = p(x)$ の逆関数をとると，これを x について解くことができて $x = x(p)$ と書ける．すると (◇) は

$$(p - g(p))x' - g'(p)x - f'(p) = 0$$

となり，線形方程式に帰着された．実際，$-(p - g(p))^{-1}$ の原始関数の一つを $G(p)$ として，両辺に $\mathrm{e}^{G(p)}$ をかけるとこれは積分できて，整理すると

$$x = \frac{\mathrm{e}^{-G(p)}}{p - g(p)} \int f'(p)\mathrm{e}^{G(p)}\,\mathrm{d}p$$

となる．これと (♡) および $p = y'$ から一般解のパラメータ表示が従う． □

第3章 定数係数線形方程式

§ 3.1 斉次方程式

○ 2階の場合

一般階の場合を考える前に，定数$a, b \in \mathbb{C}$を係数とする2階斉次線形方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{$\diamondsuit$}$$

を見ておく．

定義. ($\diamondsuit$) の**特性多項式**，**特性方程式**とは，それぞれ

$$\lambda^2 + a\lambda + b, \quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

のことである．また($\diamondsuit$)の**特性根**とは，特性多項式の根あるいは特性方程式の解のことである．

定理 3.1. ($\diamondsuit$)の解空間

$$V = \left\{ y \in C^2(\mathbb{R});\ y'' + ay' + by = 0 \right\}$$

は自然な和とスカラー倍に関して2次元ベクトル空間となる．さらに，($\diamondsuit$)の2つの特性根をα, βとすると，以下が成り立つ．

1. $\alpha \neq \beta$のとき，Vは$\left\{ \mathrm{e}^{\alpha x}, \mathrm{e}^{\beta x} \right\}$を基底に持つ．特に($\diamondsuit$)の一般解は

   $$y = A\mathrm{e}^{\alpha x} + B\mathrm{e}^{\beta x}$$

   である．

2. $\alpha = \beta$のとき，Vは$\left\{ \mathrm{e}^{\alpha x}, x\mathrm{e}^{\alpha x} \right\}$を基底に持つ．特に($\diamondsuit$)の一般解は

   $$y = A\mathrm{e}^{\alpha x} + Bx\mathrm{e}^{\alpha x}$$

   である．

注意. 上の基底を($\diamondsuit$)の**解の基本系**あるいは**基本解**と呼ぶ．

証明. Vがベクトル空間であることはほぼ明らかだが，念のため確認する．任意の$y, z \in V$と$c, d \in \mathbb{C}$に対し

$$\begin{aligned}(cy + dz)'' &+ a(cy + dz)' + b(cy + dz) \\ &= c(y'' + ay' + by) + d(z'' + az' + bz) = 0\end{aligned}$$

なので，$cy + dz \in V$となる．よってVはベクトル空間である．

残りの証明において記号を簡単にするために，**微分作用素**

$$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

を導入する．このとき，($\diamondsuit$)は

$$(D - \alpha)(D - \beta)y = 0 \tag{$\clubsuit$}$$

のように書き直せることに注意する．

1. $\alpha \neq \beta$ のとき，($\clubsuit$) の両辺に $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ をかけると

$$De^{-\alpha x}(D-\beta)y = 0 \qquad \therefore\ \mathrm{e}^{-\alpha x}(D-\beta)y = A$$

となる．続けて $\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)x}$ をかけると

$$De^{-\beta x}y = A\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)x} \qquad \therefore\ \mathrm{e}^{-\beta x}y = \frac{A}{\alpha-\beta}\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)x} + B$$

となり，したがって

$$y = A'\mathrm{e}^{\alpha x} + B\mathrm{e}^{\beta x}, \quad A' = \frac{A}{\alpha-\beta}$$

を得る．$\left\{\mathrm{e}^{\alpha x}, \mathrm{e}^{\beta x}\right\}$ は V を張ることが分かったので，あとは1次独立性を確かめればよい．ある $A, B \in \mathbb{C}$ に対して

$$A\mathrm{e}^{\alpha x} + B\mathrm{e}^{\beta x} \equiv 0$$

とする．このとき，この等式およびこの等式の微分に $x=0$ を代入すると

$$A + B = 0, \quad \alpha A + \beta B = 0$$

となるが，$\alpha \neq \beta$ に注意すると，結局 $A = B = 0$ が従う．

2. $\alpha = \beta$ のとき，($\clubsuit$) に $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ をかけると

$$D^2\mathrm{e}^{-\alpha x}y = 0 \qquad \therefore\ \mathrm{e}^{-\alpha x}y = A + Bx$$

となるので，

$$y = A\mathrm{e}^{\alpha x} + Bx\mathrm{e}^{\alpha x}$$

を得る．1と同様に，あとは $\left\{\mathrm{e}^{\alpha x}, x\mathrm{e}^{\alpha x}\right\}$ の1次独立性を確かめればよい．ある $A, B \in \mathbb{C}$ に対して

$$A\mathrm{e}^{\alpha x} + Bx\mathrm{e}^{\alpha x} \equiv 0$$

とする．すると，やはり1と同様にして $A = B = 0$ が従う． □

例題. 常微分方程式 $y'' - y' - 6y = 0$ を解け．

解．特性多項式は $\lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$ となるので，一般解は

$$y = A\mathrm{e}^{3x} + B\mathrm{e}^{-2x}$$

である． □

例題. 常微分方程式 $y'' - 4y' + 4y = 0$ を解け．

解．特性多項式は $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ となるので，一般解は

$$y = A\mathrm{e}^{2x} + Bx\mathrm{e}^{2x}$$

である． □

例題. 常微分方程式 $y'' + 9y = 0$ を解け．

解．特性多項式は $\lambda^2 + 9 = (\lambda - 3\mathrm{i})(\lambda + 3\mathrm{i})$ となるので，一般解は

$$y = A\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + B\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}$$

である．なお，Eulerの公式を用いて

$$\begin{aligned} y &= A(\cos 3x + \mathrm{i}\sin 3x) + B(\cos 3x - \mathrm{i}\sin 3x) \\ &= E\cos 3x + F\sin 3x \end{aligned}$$

と書いてもよい．ただし，$E = (A + B)$，$F = \mathrm{i}(A - B)$ とした． □

注意. 上の例題と同様に，2つの特性根が互いに共役な複素数であるとき，定理 3.1の主張は以下のように書き直すこともできる．

系 3.2. 定理 3.1において，ある$p, q \in \mathbb{R}$が存在して

$$\alpha = p + \mathrm{i}q, \quad \beta = p - \mathrm{i}q, \quad q \neq 0$$

とする．このとき，$(\diamondsuit)$は$\left\{\mathrm{e}^{px}\cos qx, \mathrm{e}^{px}\sin qx\right\}$を解の基本系に持つ．特に$(\diamondsuit)$の一般解は

$$y = A\mathrm{e}^{px}\cos qx + B\mathrm{e}^{px}\sin qx$$

である．

証明. 定理 3.1からすぐに分かる． □

注意. 応用においては，物理的設定からyが実数値のみに限定されていることも多く，その場合，上のような解の基本形を用いた方が係数が実数となり，扱いやすい．一方，理論上においては，指数関数を用いた方が記述が統一的になり，見通しが良い．

○ **Wronski行列式**

定義. $(\diamondsuit)$の2つの解y_1, y_2に対し，それらの**Wronski行列式**を

$$W[y_1, y_2] = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

で定義する．

定理 3.3. y_1, y_2を$(\diamondsuit)$の解とし，$W = W[y_1, y_2]$とおく．

1. $W(x) = \mathrm{e}^{-ax}W(0)$が成り立つ．
2. 以下の条件は互いに同値である．
   (a) y_1, y_2は1次独立である．特に，y_1, y_2は$(\diamondsuit)$の解の基本系をなす．
   (b) あるxに対し$W(x) \neq 0$である．
   (c) 任意のxに対し$W(x) \neq 0$である．

証明. 1. y_1, y_2が$(\diamondsuit)$の解であることから，

$$W' = y_1'y_2' - y_2'y_1' + y_1y_2'' - y_2y_1'' = -ay_1y_2' + ay_2y_1' = -aW$$

が成り立つ．したがって$(\mathrm{e}^{ax}W(x))' = 0$であり，これから結論が従う．

2. (b)と(c)の同値性は1より明らかである．またy_1, y_2が1次従属であれば$W \equiv 0$となることもすぐに分かる．逆に$W \equiv 0$とすると，$y_1y_2 \neq 0$となる範囲において

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2} \quad \therefore\ y_1 = Cy_2$$

でなければならない．したがって主張は示された． □

注意. この結果は変数係数にも拡張される．なお，上の証明の最後の部分で厳密には定理 3.1または常微分方程式の初期値問題の解の一意性を用いている．

○ **一般階の場合**

さて，一般階の斉次線形方程式を考えよう．定数$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$に対し

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \qquad (\clubsuit)$$

を考える．特性多項式，特性方程式，特性根は2階のときと同様に定義する．

定理 3.4. $(\clubsuit)$の解空間は自然な和とスカラー倍に関してn次元ベクトル空間となる．また，$(\clubsuit)$の特性多項式が

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = \prod_{j=1}^{m}(\lambda - \alpha_j)^{k_j}$$

の様に因数分解されたとする．ただし任意の$j \neq l$に対し$\alpha_j \neq \alpha_l$とする．このとき，$(\clubsuit)$の解空間は

$$\left\{x^k \mathrm{e}^{\alpha_j x};\ j = 1, \ldots, m,\ k = 0, \ldots, k_j - 1\right\}$$

を解の基本系に持つ．

証明. ここでは，1次独立性のみを確かめる．ある C_{jk} に対し

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{k_j-1} C_{jk}x^k \mathrm{e}^{\alpha_j x} \equiv 0$$

とする．するとこのとき，

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\prod_{l=2}^{m}(D-\alpha_l)^{k_l}\right]\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{k_j-1} C_{jk}x^k \mathrm{e}^{\alpha_j x} \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{k_j-1} C_{jk}\mathrm{e}^{\alpha_j x}\left[\prod_{l=2}^{m}(D+\alpha_j-\alpha_l)^{k_l}\right]x^k \\ &= \sum_{k=0}^{k_1-1} C_{1k}\mathrm{e}^{\alpha_1 x}\left[\prod_{l=2}^{m}(D+\alpha_1-\alpha_l)^{k_l}\right]x^k \end{aligned}$$

であり，x の最高次の係数に注目することで $C_{1(k_1-1)} = \cdots = C_{10} = 0$ が順々に分かる．あとはこれを繰り返せばよい． □

§ 3.2 非斉次方程式

ここでは定数 $a, b \in \mathbb{C}$ を係数とする2階非斉次線形方程式

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (\spadesuit)$$

を扱う．

注意. 1．本節の議論も一般階に拡張されるが，本講では割愛する．

2．非斉次項 $f(x)$ は**外力項**などと呼ばれることもある．

定理 3.5. y_0 を $(\spadesuit)$ の特殊解とし，y_1, y_2 を斉次方程式 $y'' + ay' + by = 0$ の解の基本系とする．このとき，$(\spadesuit)$ の一般解は

$$y = y_0 + C_1y_1 + C_2y_2 \quad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

で与えられる．また一般解以外の解は存在しない．

証明. y_0 は $(\spadesuit)$ の特殊解なので

$$y_0'' + ay_0' + by_0 = f(x)$$

が成り立つ．これと $(\spadesuit)$ の差をとると，$z = y - y_0$ に関する斉次方程式

$$z'' + az' + bz = 0$$

得られる．よって定理 3.1から主張が従う． □

注意.「非斉次解＝特殊解＋斉次解」と見ることができる．よって特に，非斉次方程式は，特殊解が一つ見つかれば，斉次方程式に帰着する．

○ **特殊解の一般公式**

定理 3.6. y_1, y_2 を斉次方程式 $y'' + ay' + by = 0$ の解の基本系とする．このとき，$(\spadesuit)$ は

$$y_0(x) = \int^x \frac{y_2(x)y_1(\xi) - y_1(x)y_2(\xi)}{W[y_1, y_2](0)}\mathrm{e}^{a\xi}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

を特殊解に持つ．

証明. y_0 の表示式を $(\spadesuit)$ に直接代入して計算することで，主張は確かめられる．詳細は**問**として省略する． □

注意. 単純な形の外力項であっても，上の公式から特殊解を計算するのはなかなか煩雑である．状況に応じて，後述の**代入法**や**演算子法**を用いるのが良いだろう．

問（定数変化法）. (♠) の特殊解が，ある z_1, z_2 を用いて

$$y_0(x) = z_1(x)y_1(x) + z_2(x)y_2(x), \quad z_1'y_1 + z_2'y_2 = 0$$

の形で書けると仮定する．z_1, z_2 を求めることで，定理 3.6 の表示を導け．

注意. 1つの特殊解 y_0 を求めるために，2つの自由度 z_1, z_2 を導入しているため，関係式 $z_1'y_1 + z_2'y_2 = 0$ で自由度を1つ縛らないと z_1, z_2 が定まらない．

解．直接計算により

$$y_0' = z_1'y_1 + z_2'y_2 + z_1y_1' + z_2y_2' = z_1y_1' + z_2y_2'$$

および

$$y_0'' = z_1'y_1' + z_2'y_2' + z_1y_1'' + z_2y_2''$$

が分かる．これらを (♠) に代入して整理すると

$$z_1'y_1' + z_2'y_2' = f$$

が従う．これと条件より

$$z_1' = -\frac{y_2 f}{y_1y_2' - y_2y_1'}, \quad z_2' = \frac{y_1 f}{y_1y_2' - y_2y_1'}$$

であり，さらに定理 3.3 を用いると

$$z_1 = -\int \frac{y_2(x)\mathrm{e}^{ax}f(x)}{W[y_1,y_2](0)}\,\mathrm{d}x, \quad z_2 = \int \frac{y_1(x)\mathrm{e}^{ax}f(x)}{W[y_1,y_2](0)}\,\mathrm{d}x$$

となる．よって所望の表示式が得られた． □

○ 代入法：具体的な外力項に対する特殊解の求め方（その1）

外力項の形から特殊解の形をある程度予想し，係数を調整して特殊解を求める方法を紹介する．本講ではこれを**代入法**と呼ぶことにする．

例題. 常微分方程式 $y'' - 4y' + 3y = x^2$ の特殊解を一つ求めよ．

解．$y_0 = ax^2 + bx + c$ を代入してみると

$$\begin{aligned} x^2 &= 2a - 4(2ax + b) + 3(ax^2 + bx + c) \\ &= 3ax^2 + (-8a + 3b)x + 2a - 4b + 3c \end{aligned}$$

となる．よって両辺の係数を比較して

$$a = \frac{1}{3},\ b = \frac{8}{9},\ c = \frac{26}{27} \quad \therefore\ y_0 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{26}{27}$$

を得る． □

例題. 常微分方程式 $y'' - 4y' + 3y = \cos x$ の特殊解を一つ求めよ．

解．$y_0 = a\cos x + b\sin x$ を代入してみると

$$(2a - 4b)\cos x + (4a + 2b)\sin x = \cos x$$

となる．よって両辺の係数を比較して

$$a = \frac{1}{10},\ b = -\frac{1}{5} \quad \therefore\ y_0 = \frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{5}\sin x$$

を得る． □

注意. 外力項が三角関数のときは，三角関数の特殊解を想定する．

例題. 常微分方程式$y'' - 4y' + 3y = 3\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x}$の特殊解を一つ求めよ．

解．$y_0 = a\mathrm{e}^{2x} + bx\mathrm{e}^{x}$を代入してみると

$$-a\mathrm{e}^{2x} - 2b\mathrm{e}^{x} = 3\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x}$$

となる．よって両辺の係数を比較して

$$a = -3,\ b = -2 \qquad \therefore\ y_0 = -3\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{x}$$

を得る． □

注意. 外力項が指数関数のときは，指数関数の特殊解を想定する．ただし外力項の指数に，対応する斉次方程式の特性根が現れる場合は，x（のべき）をかけて調整する．

例題. ω, θ, Aは0でない実定数で$\omega \neq \theta$とする．初期値問題

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A\sin\theta t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

を解け．また$\theta \sim \omega$のときの解の振幅について考察せよ．ただしここではtを独立変数とする．

解．$x_0 = a\cos\theta t + b\sin\theta t$を代入すると

$$a(\omega^2 - \theta^2)\cos\theta t + b(\omega^2 - \theta^2)\sin\theta t = A\sin\theta t$$

となるので，係数を比較することで特殊解

$$x_0 = \frac{A}{\omega^2 - \theta^2}\sin\theta t$$

を得る．よって一般解は

$$x = \frac{A}{\omega^2 - \theta^2}\sin\theta t + C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$$

であり，これと初期条件より求める解は

$$x = \frac{A}{\omega^2 - \theta^2}\Big[\sin\theta t - \frac{\theta}{\omega}\sin\omega t\Big]$$

である．

さてこの解を以下の様に書き換えると，$\theta \sim \omega$のとき

$$\begin{aligned} x &= \frac{A}{\omega^2 - \theta^2}\bigg[\Big(1 - \frac{\theta}{\omega}\Big)\sin\Big(\frac{\theta + \omega}{2}t\Big)\cos\Big(\frac{\theta - \omega}{2}t\Big) \\ &\qquad + \Big(1 + \frac{\theta}{\omega}\Big)\cos\Big(\frac{\theta + \omega}{2}t\Big)\sin\Big(\frac{\theta - \omega}{2}t\Big)\bigg] \\ &\sim \frac{A}{\omega(\omega - \theta)}\cos\Big(\frac{\theta + \omega}{2}t\Big)\sin\Big(\frac{\theta - \omega}{2}t\Big) \end{aligned}$$

となる．したがって$\theta \sim \omega$のとき振幅は大きくなる（**共鳴**または**共振**と呼ばれる）．同時に**うなり**が起こることも分かる． □

例題. ω, Aは0でない実定数とする．初期値問題

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A\sin\omega t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

を解け．また解の振幅について簡単にコメントせよ．ただしここでも独立変数はtである．

解．$x_0 = at\cos\omega t + bt\sin\omega t$を代入すると

$$-2a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t = A\sin\Omega t$$

となるので，係数を比較することで特殊解

$$x_0 = -\frac{A}{2\omega}t\cos\omega t$$

を得る．よって一般解は

$$x = -\frac{A}{2\omega} t \cos\omega t + C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$$

であり，これと初期条件より求める解は

$$x = \frac{A}{2\omega^2}\big(\sin\omega t - \omega t \cos\omega t\big)$$

である．また，この表示から解の振幅は t について 1 次のオーダーで増大することが分かる． □

注意. この解は直前の例題の解において $\theta \to \omega$ としたものに一致する．

○ **演算子法：具体的な外力項に対する特殊解の求め方（その２）**

次に形式計算から特殊解を導く方法を，例題を通じて紹介する．本講ではこれを**演算子法**あるいは**記号法**と呼ぶことにする．一般化や正当化は難しくはないが，割愛する．

例題. 常微分方程式 $y'' - 4y' + 3y = x^2$ の特殊解を一つ求めよ．

解. まず形式的に

$$y = \left(D^2 - 4D + 3\right)^{-1} x^2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\left(4D - D^2\right)\right)^{-1} x^2$$

のように書き直す．さらに形式級数

$$\left(1 - \frac{1}{3}\left(4D - D^2\right)\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\left(4D - D^2\right)\right)^n \qquad (\spadesuit)$$

を用いる．x^2 の 3 階以上の微分は 0 なので，級数は有限和に帰着して

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{1}{3}\left(4D - D^2\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}\left(4D - D^2\right)\right)^2 x^2\right] \\ &= \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{26}{27} \end{aligned}$$

を得る． □

注意. 作用素に対する $(\spadesuit)$ の形の級数を **Neumann 級数**と呼ぶ．Neumann 級数はいつでも適用できるわけではないが，外力項が多項式の場合には級数が有限和となり，適用できる．

例題. 常微分方程式 $y'' - 4y' + 3y = \cos x$ の特殊解を一つ求めよ．

解. ここでは $z'' - 4z' + 3z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ の特殊解を求め，その実部をとる．形式的に

$$\begin{aligned} z &= \left(D^2 - 4D + 3\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\left((D+\mathrm{i})^2 - 4(D+\mathrm{i}) + 3\right)^{-1} 1 \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\left(D^2 - (4-2\mathrm{i})D + 2 - 4\mathrm{i}\right)^{-1} 1 \end{aligned}$$

と書き換える．あとは直前の例題と同様に計算して

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1}{2-4\mathrm{i}} = \frac{1+2\mathrm{i}}{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \qquad \therefore\ y = \frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{5}\sin x$$

を得る． □

注意. 指数関数に対しては Neumann 級数は有限和とはならないが，交換関係を用いれば計算を進めることができる．

例題. 常微分方程式 $y'' - 4y' + 3y = 3\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x}$ の特殊解を一つ求めよ．

解．直前の例と同様に，指数関数との交換関係を用いて

$$\begin{aligned} y &= \left(D^2 - 4D + 3\right)^{-1}\left(3\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x}\right) \\ &= 3\mathrm{e}^{2x}\left(D^2 - 1\right)^{-1}1 + 4\mathrm{e}^{x}\left(D^2 - 2D\right)^{-1}1 \end{aligned}$$

と書ける．右辺第２項にはこのままではNeumann級数を適用できないが，$(D^2 - 2D)^{-1} = D^{-1}(D-2)^{-1}$ と書き，D^{-1} を積分に読み替えると，

$$y = -3\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x}D^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -3\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{x}$$

が従う． □

注意. D^{-1} は積分に読み替える．特殊解を求めるだけなので積分定数は付けなくてよい．

§ 3.3 線形方程式系

$n \in \mathbb{N}$ とする．また n 次正方行列 A と n 次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}(x)$ が与えられているとする．本節では，n 次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{y}(x)$ を未知関数とする線形方程式

$$\boldsymbol{y}'(x) = A\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{f}(x)$$

を考える．成分表示すれば，これは**線形微分方程式系**

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' &= a_{21}y_1 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{aligned}$$

に他ならない．

注意. 上のベクトル値１階線形方程式は，前節で扱ったようなスカラー値高階線形方程式を特別な場合として含んでいる．実際，

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$$

は，いつでも

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

のように書き直すことができる．

例. ばね定数１のばね $(n+1)$ 個と質量１の質点 n 個を交互につないで，摩擦の無い水平な床の上に直線状に設置し，すべてのばねが自然長となる状態で両端を固定する．系の運動は直線上に拘束されているとする．第 j 番目の質点の静止状態からの変位を x_j とすると，それらが満たす運動方程式は

$$\ddot{x}_j = x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

である．ただし，$x_0 \equiv x_{n+1} \equiv 0$ とする．これは

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = L\boldsymbol{x}, \quad L = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & \ddots & \\ & & & -2 \end{pmatrix},$$

と表すことができるが，さらに

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \dot{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \dot{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix}$$

とも書ける．

○ **行列の指数関数を用いた解法（抽象理論）**

定理 3.7. 任意の n 次正方行列 A に対し，

$$\mathrm{e}^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

の各成分は収束する．さらに以下が成り立つ．

1. n 次正方零行列 O に対し $\mathrm{e}^O = I$.
2. n 次正方行列 B が $AB = BA$ を満たすなら，
$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A.$$
3. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{xA} = A\mathrm{e}^{xA} = \mathrm{e}^{xA} A.$$

注意. 行列の指数関数の具体的計算方法は後で説明する．

証明. $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ として，A の**最大ノルム**を

$$\|A\| = \max_{i,j=1,\ldots,n} |a_{jk}|$$

で定めると，任意の k に対し

$$\|A^k\| \leq n^{k-1} \|A\|^k$$

が成り立つことが分かる（**問**とする）．すると $A^k/k!$ の各成分の絶対値は

$$\left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \frac{n^{k-1}}{k!} \|A\|^k$$

で上から評価することができ，これは $k \to \infty$ のとき，十分早く 0 に収束する．したがって e^A の各成分は収束することが分かる．

残りの主張は，スカラーに対する指数関数と同様にして，以下のように示せる．

1. 定義に従って直接計算すれば，

$$\mathrm{e}^O = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} O^k = I$$

が分かる．

2. A と B は可換なので，以下のように二項定理を適用できて，

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l+m=k} \frac{k!}{l!m!} A^l B^m \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l+m=k} \frac{1}{l!m!} A^l B^m \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで和の順序交換を認めれば，

$$\mathrm{e}^{A+B} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} A^l \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} B^m \right) = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$$

を得る．左辺は A と B を入れ替えても不変なので，第 2 等式も成り立つ．

3. 項別微分（微分の和の順序交換）を認めれば，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{xA} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} A^k = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} x^l A^{l+1} = A\mathrm{e}^{xA} = \mathrm{e}^{xA} A$$

を得る． □

注意. 1. 行列の最大ノルムは**劣乗法性** $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ を満たさない．

2. 上で認めた事実はもちろん正当化可能だが，ここでは詳細には立ち入らない（実際には初等的に示すことができる）．

定理 3.8. 1. 斉次線形方程式の初期値問題

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$$

は一意解を持ち，それは

$$\boldsymbol{y} = \mathrm{e}^{xA}\boldsymbol{y}_0$$

で与えられる．

2. 非斉次線型方程式の初期値問題

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$$

は一意解を持ち，それは

$$\boldsymbol{y} = \mathrm{e}^{xA}\boldsymbol{y}_0 + \int_0^x \mathrm{e}^{(x-\xi)A}\boldsymbol{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

で与えられる．

注意. この場合にもやはり「非斉次解＝斉次解＋特殊解」の形をしていることに注意せよ．非斉解を斉次解作用素 e^{xA} で表示する公式は**Duhamel の公式**と呼ばれ，より一般的な設定にも拡張されている．

証明. 非斉次の場合を示せば十分である．方程式の両辺に e^{-xA} を掛けると

$$\left(\mathrm{e}^{-xA}\boldsymbol{y}\right)' = \mathrm{e}^{-xA}\boldsymbol{f}(x)$$

と書き換えられる．初期条件を用いて，これを 0 から x まで積分すると

$$\mathrm{e}^{-xA}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0 = \int_0^x \mathrm{e}^{-\xi A}\boldsymbol{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

となり，これに e^{xA} を掛けることで主張の公式が従う． □

○ 対角化可能な行列の指数関数

定理 3.9. A を n 次正方行列とし，ある正則な n 次正方行列 P に対し

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C},$$

と書けたとする．このとき，

$$\mathrm{e}^{xA} = P\Big(\mathrm{diag}\big(\mathrm{e}^{x\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{x\lambda_n}\big)\Big)P^{-1}$$

が成り立つ．

注意. 一般に，$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ は $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を対角成分とする対角行列を表すことにする．なお，以降ブロック対角行列についても同様の記法を用いる．

証明. 行列の指数関数の定義と上の条件から，

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{xA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}A^k \\
&= P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\left(P^{-1}AP\right)^k\right)P^{-1} \\
&= P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,\mathrm{diag}\left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right)\right)P^{-1} \\
&= P\Big(\mathrm{diag}\big(\mathrm{e}^{x\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{x\lambda_n}\big)\Big)P^{-1}
\end{aligned}$$

である． □

問. 実2次正方行列Aは実でない固有値$\alpha = a - \mathrm{i}b$ $(a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$を持つとし，対応する固有ベクトルを$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2)$ とする.

1. $A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}$を$a, b, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$を用いて表せ.
2. 行列$P = (\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v})$は正則であることを示せ.
3. 等式

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}^{tP^{-1}AP} = \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$$

を示せ.（$P^{-1}AP = aI + bJ$とおいて，定理 3.7の2および行列の指数関数の定義を用いよ.）

注意. 複素固有値を持つ実正方行列に対し，実数の範囲内で指数関数を計算したいことがある．そのようなときには上の手順が有効である.

○ 一般の行列の指数関数

ひとまず**Jordan標準形**について復習する.

定義. Nはν次正方行列で，対角成分の右上に1が並び，それ以外は0であるとする：

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき，ν次**Jordanブロック**を

$$J_\nu(\lambda) = \lambda I + N, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

で定める．ここでIはν次単位行列である.

問. 任意の$k \in \mathbb{N}$に対し，N^kを計算し，その具体形を確認せよ.

定理 3.10. Aをn次正方行列とする．このとき，ある正則行列Pが存在して，

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(J_{\nu_1}(\lambda_1), \ldots, J_{\nu_p}(\lambda_p))$$

の形に書ける．ここで，$\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$かつ$\nu_1 + \cdots + \nu_p = n$である.

証明. 省略する．線形代数の教科書を参照せよ. □

注意. 1. 上のブロック対角行列をAの**Jordan標準形**と呼ぶ．Jordan標準形はブロックの並べ替えを除いて一意的である.

2. 一般に，ある$j \neq k$に対し$\lambda_j = \lambda_k$となることもあり得る.
3. 対角化可能な場合は$\nu_1 = \cdots = \nu_p = 1$に対応する.

定理 3.11. 1. Aをn次正方行列とし，ある正則なn次正方行列Pに対し

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(J_{\nu_1}(\lambda_1), \ldots, J_{\nu_p}(\lambda_p))$$

と書けたとする．このとき，

$$\mathrm{e}^{xA} = P\Big(\mathrm{diag}\Big(\mathrm{e}^{xJ_{\nu_1}(\lambda_1)}, \ldots, \mathrm{e}^{xJ_{\nu_p}(\lambda_p)}\Big)\Big)P^{-1}$$

が成り立つ.

2. 一般のν次Jordanブロック$J_\nu(\lambda)$に対し

$$\mathrm{e}^{xJ_\nu(\lambda)} = \mathrm{e}^{x\lambda}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{x^k}{k!}N^k$$

と書ける.

注意. 1. 参考までに，$\mathrm{e}^{xJ_\nu(\lambda)}$ を行列の形に具体的に書くと

$$\mathrm{e}^{xJ_\nu(\lambda)} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x\lambda} & x\mathrm{e}^{x\lambda} & \frac{x^2}{2!}\mathrm{e}^{x\lambda} & \frac{x^3}{3!}\mathrm{e}^{x\lambda} & \cdots & \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\mathrm{e}^{x\lambda} \\ 0 & \mathrm{e}^{x\lambda} & x\mathrm{e}^{x\lambda} & \frac{x^2}{2!}\mathrm{e}^{x\lambda} & \cdots & \frac{x^{\nu-2}}{(\nu-2)!}\mathrm{e}^{x\lambda} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{x\lambda} & x\mathrm{e}^{x\lambda} & \cdots & \frac{x^{\nu-3}}{(\nu-3)!}\mathrm{e}^{x\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{x\lambda} & \cdots & \frac{x^{\nu-4}}{(\nu-4)!}\mathrm{e}^{x\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{x\lambda} \end{pmatrix}$$

となる．

2. 具体的な行列の指数関数の計算は，広義固有空間へのスペクトル分解を用いるともう少し計算量を減らせるが，本講では扱わない．

証明. 1. 定理 3.9 と同様に示せるので省略する．

2. I, N が可換なことに注意して，定理 3.7 および $N^\nu = 0$ を用いると

$$\mathrm{e}^{xJ_\nu(\lambda)} = \mathrm{e}^{x\lambda I}\mathrm{e}^{xN} = \mathrm{e}^{x\lambda}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{x^k}{k!}N^k$$

が分かる． □

例. 例えば，

$$\exp\left[x\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{3x} & x\mathrm{e}^{3x} & \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{3x} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3x} & x\mathrm{e}^{3x} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}$$

である．

○ Jordan 標準形の計算問題

例題. 次の行列の Jordan 標準形を求めよ：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解. $\det(\lambda I - A) = (\lambda-1)^2(\lambda-4)$ なので，固有値は $\lambda = 1, 4$ である．固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルを求めるには，$(A - I)\boldsymbol{p} = 0$ を解けばよい．係数行列を行基本変形で変形すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

のように固有値の重複度と同じ本数の 1 次独立な固有ベクトルがとれる．固

有値 $\lambda = 4$ に対応する固有ベクトルを求めるには，$(A - 4I)\boldsymbol{p}_3 = 0$ を解けばよく，上と同様にして

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ととれる．ゆえに $P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$ とおけば，

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}(A\boldsymbol{p}_1\ A\boldsymbol{p}_2\ A\boldsymbol{p}_3) = P^{-1}(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ 4\boldsymbol{p}_3) \\ &= (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ 4\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る． □

注意. A は実対称なので P を直交行列にとることもできるが，ここでは不要なため，そうしなかった．固有ベクトルを並べることで A を対角化できる仕組みを上の計算から読み取れるとよい．

例題. 次の行列の Jordan 標準形を求めよ：

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解. $\det(\lambda I - A) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$ なので，固有値は $\lambda = 1, 2$ である．固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルを求めるために，$(A-I)\boldsymbol{p}_1 = 0$ を解く．係数行列の行基本変形により

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を得る．一方，固有値 $\lambda = 2$ に対しても同様にして，

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．固有値の重複度よりも少ない本数の固有ベクトルしか取れないため，対角化不可能であり，$(A-2I)\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2$ を解くことになる．拡大係数行列の行基本変形により，

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と取れる．ゆえに $P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$ とおけば，

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}(A\boldsymbol{p}_1\ A\boldsymbol{p}_2\ A\boldsymbol{p}_3) = P^{-1}(\boldsymbol{p}_1\ 2\boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_2 + 2\boldsymbol{p}_3) \\ &= (\boldsymbol{e}_1\ 2\boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る． □

例題. 次の行列の Jordan 標準形を求めよ：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解. $\det(\lambda I - A) = (\lambda-1)^3$ なので，固有値は $\lambda = 1$ である．固有ベクトルを求めるために，$(A-I)\boldsymbol{p}_1 = 0$ を解く．係数行列の行基本変形より

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

のようにとれる．次に $(A-I)\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1$ を解く．拡大係数行列を見ることで

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ととれる．さらに $(A-I)\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2$ を解く．同様にして

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

を得る．ゆえに $P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$ とおけば，

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}(A\boldsymbol{p}_1\ A\boldsymbol{p}_2\ A\boldsymbol{p}_3) \\ &= P^{-1}(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3) \\ &= (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る． □

例題. 次の行列の Jordan 標準形を求めよ：

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -4 & 6 & 2\\ 4 & -4 & 0\end{pmatrix}.$$

解. $\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3$ なので，固有値は $\lambda=2$ である．固有ベクトルを求めるために，$(A-2I)\boldsymbol{p}_1=0$ を解く．係数行列の行基本変形より

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -4 & 4 & 2\\ 4 & -4 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad\therefore\ \boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha\\ 2\beta\end{pmatrix}$$

となる．固有空間の次元が 1 でも 3 でもないため，どの固有ベクトルをとるべきかまだ分からない．そこで $(A-2I)\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1$ が解ける条件を求める．拡

大係数行列の行基本変形より，

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 2 & 1 & \alpha+\beta\\ -4 & 4 & 2 & \alpha\\ 4 & -4 & -2 & 2\beta\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -2 & -1 & -\alpha-\beta\\ 0 & 0 & 0 & \alpha+2\beta\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

となるので，$\alpha+2\beta=0$ でなければならない．よって例えば，$\alpha=2,\beta=-1$ として

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1/2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

が取れる．さらに $\boldsymbol{p}_1$ と 1 次独立な固有ベクトル

$$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

をとって，$P=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$ とおけば，

$$\begin{aligned}P^{-1}AP&=P^{-1}(A\boldsymbol{p}_1\ A\boldsymbol{p}_2\ A\boldsymbol{p}_3)\\ &=P^{-1}(2\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_1+2\boldsymbol{p}_2\ \ 2\boldsymbol{p}_3)\\ &=(2\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2\ \ 2\boldsymbol{e}_3)\\ &=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

を得る．□

例題. 次の行列の Jordan 標準形を求めよ：

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

略解. $\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^4$ なので，固有値は $\lambda=1$ である．固有ベクトルを求めるために，$(A-I)\boldsymbol{p}=0$ を解く．係数行列の行基本変形を通じて，

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha-\beta\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

が分かる．このような $\boldsymbol{p}$ に対し，$(A-I)\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}$ が解けるための条件を求めると，これはいつでも解けることが分かる．したがって，1 次独立な $\boldsymbol{p}$ を任意に 2 つ選んでこれまでと同様に議論することで

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

となることが分かる．□

第４章 変数係数２階線形方程式

§ 4.1 解空間の構造

○ 斉次方程式

ここでは変数係数２階斉次線形方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (\spadesuit)$$

の基本的性質を述べる．ただし $p(x), q(x)$ は適当な滑らかさを持つとする．一般に，($\spadesuit$) は初等的には求積できないことが知られているが，定数係数のときと同様な，いくつかの抽象的性質は示すことができる．それを列挙する．

定理 4.1. ($\spadesuit$) の解空間は２次元ベクトル空間となる．よって特に，１次独立な２つの解 y_1, y_2 が得られれば，($\spadesuit$) の一般解は

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

と書ける．また，一般解以外の解は存在しない．

注意. 上のような y_1, y_2 をやはり ($\spadesuit$) の**解の基本系**あるいは**基本解**と呼ぶ．

証明. ($\spadesuit$) の解空間がベクトル空間となることは自明である．常微分方程式の初期値問題の解の一意存在定理（後述，定理 6.2）によれば，初期条件

$$\begin{cases} y(x_0) = 1, \\ y'(x_0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 1, \end{cases}$$

をそれぞれ満たす解 y_1, y_2 が存在する．これらが１次独立なことは，初期値に注目することですぐに分かる．一方，一般の初期条件

$$y(x_0) = C_1, \quad y'(x_0) = C_2$$

に対し，

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

は一つの解を与えるが，再び解の一意性（定理 6.2）を用いると，解はこれ以外にはない．以上より主張が従う． □

定義. ($\spadesuit$) の２つの解 y_1, y_2 に対し，それらの **Wronski 行列式**を

$$W[y_1, y_2] = y_1y_2' - y_2y_1'$$

で定義する．

定理 4.2. y_1, y_2 を ($\spadesuit$) の解とし，$W = W[y_1, y_2]$ とおく．

1. 任意の x, x_0 に対し $W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$ が成り立つ．
2. 以下の条件は互いに同値である．
   (a) y_1, y_2 は１次独立である．特に，y_1, y_2 は ($\spadesuit$) の解の基本系をなす．
   (b) ある x に対し $W(x) \neq 0$ である．
   (c) 任意の x に対し $W(x) \neq 0$ である．

証明. 定理 3.3 と同様に示せるので証明を省略する． □

○ **非斉次方程式**

次に変数係数２階非斉次線形方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (\heartsuit)$$

について述べる．

定理 4.3. y_0 を $(\heartsuit)$ の特殊解とし，y_1, y_2 を対応する斉次方程式 $(\spadesuit)$ の解の基本系とする．このとき，$(\heartsuit)$ の一般解は

$$y = y_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

で与えられる．また一般解以外の解は存在しない．

証明．定理 3.5 と同様に示せるので，証明を省略する． □

注意. ４度目となるが,「非斉次解＝特殊解＋斉次解」となっている．

定理 4.4. y_1, y_2 を本節冒頭の斉次方程式 $(\spadesuit)$ の解の基本系とする．このとき，$(\heartsuit)$ は

$$y_0(x) = \int^x \frac{y_2(x)y_1(\xi) - y_1(x)y_2(\xi)}{W[y_1(\xi), y_2(\xi)]} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

を特殊解に持つ．

証明．定理 3.6 と同様に示せるので，証明を省略する． □

§ 4.2 方程式の変形

○ **標準形**

定義. 変数係数２階斉次線形方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (\spadesuit)$$

が**標準形**であるとは，$p(x) \equiv 0$ となること，すなわち

$$y'' + q(x)y = 0$$

の形となることである．

注意. 標準形だからと言って，必ずしも方程式が簡単になるわけではない．実際，次のように，$(\spadesuit)$ はいつでも標準形へと変形できる．

定理 4.5. 1. $(\spadesuit)$ において，

$$z = y \exp\left(\frac{1}{2}\int^x p(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)$$

を通じて従属変数を y から z へと変数変換すると，

$$z'' + \left(q(x) - \frac{p(x)^2}{4} - \frac{p'(x)}{2}\right)z = 0$$

となる．

2. $P(x)$ を $p(x)$ の原始関数の一つとする．このとき，$(\spadesuit)$ において，

$$t = \int^x \mathrm{e}^{-P(\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

を通じて独立変数を x から t へと変数変換すると，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \mathrm{e}^{2P(x(t))} q(x(t)) y = 0$$

となる．

証明. 1. $a=a(x)$ として，Leibniz 則を用いると，(♠) は

$$\frac{1}{a}(ay)''+\left(p-\frac{2a'}{a}\right)y'+\left(q-\frac{a''}{a}\right)y=0$$

と書き換えられる．$z=ay$ としたときにこれが標準形になるためには,

$$p-\frac{2a'}{a}=0 \qquad \therefore\ a=\exp\left(\frac{1}{2}\int^{x}p(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)$$

となることが必要十分である．よって主張が従う．

2. ひとまず $t=t(x)$ として，(♠) を書き換えると

$$t'^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\left(t''+pt'\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+qy=0$$

となる．よって $t=t(x)$ を主張のようにとれば，確かに結論が従う． □

○ Riccati の方程式との同等性

定理 4.6. 1. 2 階斉次線形方程式

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

において $y=\mathrm{e}^{\int^x z(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$ とおくと，Riccati の方程式

$$z'+z^2+p(x)z+q(x)=0$$

が得られる．

2. 逆に，Riccati 方程式

$$y'+p(x)y^2+q(x)y+r(x)=0$$

において $y=z'/(pz)$ とおくと，2 階斉次線形方程式

$$z''-\left(\frac{p'(x)}{p(x)}-q(x)\right)z'+p(x)r(x)z=0$$

が得られる．

証明. 証明は**問**として省略する． □

注意. この意味で，2 階斉次線形方程式は Riccati の方程式と同等である．

○ d'Alembert の階数低下法

定理 4.7. 2 階斉次線形方程式

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

に対し，解が一つ見つかったとする．このとき，この方程式は 1 階線形方程式に帰着し，求積できる．

注意. 1. このときさらに，定理 4.4 および定理 4.3 により，対応する非斉次方程式も解けることになる．

2. より一般に，n 階線形方程式も，解が一つ見つかれば，$(n-1)$ 階線形方程式に帰着させることができる．ただし $n\geq 3$ の場合には，2 階以上の線形方程式に帰着されるので，必ずしも求積できない．

証明．既知の解をy_1として，定数変化法を適用する．実際，$y = y_1(x)z$として，これを方程式に代入し，整理すると

$$z'' + \left(\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x)\right)z' = 0$$

となる．これはz'に関する1階線形方程式であり，両辺に

$$y_1(x)^2 \exp\left(\int^x p(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)$$

を掛けることで求積できる．ゆえに主張が従う． □

○ **Eulerの方程式**

定義. 次の形の常微分方程式を**Eulerの方程式**と呼ぶ：

$$x^2y'' + axy' + by = f(x), \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

解法1．$\pm x > 0$において，それぞれ独立変数を

$$x = \pm \mathrm{e}^t, \quad t = \log|x|$$

で変換すると，定数係数線形方程式に帰着する．実際

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \quad x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} = \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

に注意すれば，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + (a-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + by = f(\pm\mathrm{e}^t)$$

と書き換えられる． □

解法2．定理 4.3と定理 4.4により，対応する斉次方程式

$$x^2y'' + axy' + by = 0$$

を解けばよい．$\pm x > 0$において，それぞれ$y = (\pm x)^\lambda = |x|^\lambda$の形の解を仮定して代入すると

$$(\lambda(\lambda-1) + a\lambda + b)|x|^\lambda = 0 \quad \therefore\ \lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$$

となる．λについて2つの解$\lambda = \alpha, \beta$が得られたとすると，一般解は，

$$y = \begin{cases} A|x|^\alpha + B|x|^\beta & \text{if } \alpha \neq \beta, \\ A|x|^\alpha + B|x|^\alpha \log|x| & \text{if } \alpha = \beta \end{cases}$$

である．ただし後者についてはd'Alembertの階数低下法を用いて対数型の解を導出した（詳細は**問**とする）． □

注意. $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots$かつ$\alpha \neq \beta$の場合には，$x = 0$の前後で任意定数を適当に取り直すことで，解を$\mathbb{R}$上全体で滑らかにつなぐことができる．

例題. 常微分法手式$x^2y'' - xy' - 3y = 0$を解け.

解．変数変換$x = \pm\mathrm{e}^t$により，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 3y = 0$$

となる．対応する特性多項式は

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1)$$

と因数分解できるので，特性根は$\lambda = 3, -1$である．したがって，

$$y = A_\pm \mathrm{e}^{3t} + B_\pm \mathrm{e}^{-t} = A_\pm|x|^3 + B_\pm|x|^{-1}$$

である．ここで$A = A_+ = -A_-$，$B = B_+ = -B_-$とおくと，

$$y = Ax^3 + Bx^{-1}$$

を得る． □

例題. 常微分方程式 $x^2y'' - xy' + 5y = 0$ を解け.

略解. 直前の例題と同様に，変数変換 $x = \pm \mathrm{e}^t$ により，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 5y = 0$$

となる．この方程式の特性根は $\lambda = 1 \pm 2\mathrm{i}$ なので，

$$y = A_{\pm}|x|\cos(2\log|x|) + B_{\pm}|x|\sin(2\log|x|)$$

である．したがって，任意定数を取り直して

$$y = Ax\cos(2\log|x|) + Bx\sin(2\log|x|)$$

を得る（解はどうやっても $x = 0$ で自然につながらないので，わざわざ任意定数を取り直さなくてもよい）. □

§ 4.3 べき級数による解法

○ **準備：解析関数**

定義. 関数 $f(x)$ が点 $x = a$ で**解析的**であるとは，a を含むある開区間上で**べき級数展開**（あるいは **Taylor 展開**）

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad (\Diamond)$$

が成り立つことである．また，$f(x)$ が**解析関数**あるいは C^{ω} **級**であるとは，定義域の各点で解析的となることである．

例. 初等関数は特異点（定義されない点）を除いて解析的である．例えば，

1. x^n $(n = 0, 1, 2, \dots)$，$\sin x$，e^x，$\arctan x$，…は $\mathbb{R}$ 上で解析的である．
2. $\log x$ は $(0, \infty)$ 上で解析的である．

定理 4.8. $f(x)$ は $x = a$ で解析的であるとする．このとき，$(\Diamond)$ の右辺のべき級数に対しある $r \in (0, \infty]$ が存在して，以下を満たす.

1. $|x - a| < r$ を満たす任意の x に対し，$(\Diamond)$ の右辺は収束する.
2. $|x - a| > r$ を満たす任意の x に対し，$(\Diamond)$ の右辺は発散する.

証明. 証明は省略する．**関数論**（**複素関数論**）の教科書を参照せよ. □

注意. 定理 4.8 の記号の下で，r を $(\Diamond)$ の**収束半径**と呼ぶ．r は $(\Diamond)$ の係数 c_n から計算することができ，例えば，

$$r = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}$$

であることが知られている．ただし，$0^{-1} = \infty$ とみなす.

例. $x \neq 1$ に対し $f(x) = (1-x)^{-1}$ と定義する．$|x| < 1$ のとき，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

が成り立つ．一方，$|x| > 1$ に対し右辺の級数は発散する（左辺が定義されているにもかかわらず！）．よって上の右辺の級数の収束半径は 1 である．なお，$x = 1/2$ のまわりでは

$$f(x) = \frac{2}{1 - 2(x - 1/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}\left(x - \frac{1}{2}\right)^n$$

であり，このべき級数の収束半径は 1/2 である.

注意. 収束半径 r は中心 $x = a$ と特異点の位置に依存して変化する．一般に，収束半径 r は円 $|x - a| = r$ が特異点に触れるまで伸ばせる.

例. 関数

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

は$x = 0$を特異点に持つように見えるが，分母からくる特異性は$\sin x$の零点と相殺するため，$f(x)$は$\mathbb{R}$上で解析的となる．実際，$f(0) = 1$と定義しておけば，$x = 0$のまわりで

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k}$$

が成り立つことが分かる．なお，このべき級数の収束半径は∞である．

定理 4.9. 定理 4.8の記号の下で，$f(x)$は$|x-a| < r$上で微分可能である．さらに$f(x)$のべき級数展開($\diamondsuit$)は項別微分であり，

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

の収束半径もrである．よって特に$f(x)$はC^∞級であり，また

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

が従う．

証明. 証明は省略する．関数論（複素関数論）の教科書を参照せよ． □

注意. 定理 4.9により，関数$f(x)$がC^ω級であれば，C^∞級である．この逆は成り立たず，C^ω級であることはC^∞級であることよりも真に強い性質である．

問. $\mathbb{R}$上の関数$f(x)$を以下で定める：

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{for } x \leq 0. \end{cases}$$

1. $f(x)$は$\mathbb{R}$上でC^∞級であることを示せ．また任意の$n \in \mathbb{N}$に対し

$$f^{(n)}(0) = 0$$

   であることを確かめよ．

2. $f(x)$は$x = 0$で解析的ではないことを示せ．

略解. 1. やや状況が煩雑になるが，直接計算により確かめられる．詳細は省略する．

2. もし$f(x)$が$x = 0$で解析的であれば，ある$r > 0$が存在して任意の$|x| < r$に対し

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$$

が成り立つ．しかし，左辺は$0 < x < r$に対し正の値をとるので，これは矛盾である． □

注意. Taylorの定理とTaylor展開を混同してはならない．実際，上の$f(x)$にTaylorの定理を適用すると，任意の$x > 0$と$N \in \mathbb{N}$に対し，ある$\theta \in (0,1)$が存在して

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

が成立する（これは正しい）．しかしこの場合，剰余項は$N \to \infty$で0に収束せず，Taylor展開はできない．

○ **解析的係数を持つ線形方程式の解法**

定理 4.10. $p(x)$ と $q(x)$ は $x=a$ で解析的とする．このとき，微分方程式
$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (\spadesuit)$$
の任意の解 y は $x=a$ で解析的である．特に，べき級数展開
$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-a)^n,\quad q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-a)^n$$
を既知として，y のべき級数展開
$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$
とともに $(\spadesuit)$ に代入して両辺の係数を比較すれば，解 y を構成できる．

証明．本講では証明を省略する． □

例題. 定理 4.10 により，**Airyの方程式**
$$y''-xy=0$$
は $x=0$ のまわりでのべき級数解
$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$
を持つことが分かる．係数 $c_2,c_3,\ldots$ を c_0,c_1 を用いて表せ．

解．y のべき級数展開を方程式に代入すると，
$$\begin{aligned}0&=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}\\&=2c_2+\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+3)(n+2)c_{n+3}-c_n\Big]x^{n+1}\end{aligned}$$

となる．右辺の x のべき級数の係数はすべて 0 でなければならないことから，
$$c_2=0,\quad (n+3)(n+2)c_{n+3}-c_n=0\ \text{ for } n=0,1,2,\ldots$$
が従う．ゆえに
$$\begin{aligned}c_{3m}&=\frac{1}{(3m)(3m-1)}c_{3m-3}=\cdots=\frac{(3m-2)(3m-5)\cdots1}{(3m)!}c_0,\\c_{3m+1}&=\frac{1}{(3m+1)(3m)}c_{3m-2}=\cdots=\frac{(3m-1)(3m-4)\cdots2}{(3m+1)!}c_1,\\c_{3m+2}&=\frac{1}{(3m+2)(3m+1)}c_{3m-1}=\cdots=0.\end{aligned}$$
を得る． □

注意． 1．c_0,c_1 の値によらず，上のべき級数解の収束半径は ∞ である．

2．例えば，初期値
$$(y(0),y'(0))=(c_0,c_1)=(1,0),(0,1)$$
に対応する解をそれぞれ y_1,y_2 とすれば，
$$\begin{aligned}y_1&=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(3m-2)(3m-5)\cdots1}{(3m)!}x^{3m},\\y_2&=x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(3m-1)(3m-4)\cdots2}{(3m+1)!}x^{3m+1}\end{aligned}$$
であり，これらはAiryの方程式の解の基本系をなす．

3．応用上は解の基本系として**Airy関数** $\mathrm{Ai}(x),\mathrm{Bi}(x)$ を選ぶことが多い．これらは上の y_1,y_2 とは異なるが，もちろん互いに線形結合で表示できる．

例題. 常微分方程式 $(x^2-1)y''-2y=0$ に対し，$x=0$ のまわりでのべき級数解を求めよ．

解．解のべき級数展開

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

を方程式に代入すると

$$\begin{aligned}0&=(x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[n(n-1)c_n-(n+2)(n+1)c_{n+2}-2c_n\Big]x^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Big[(n-2)c_n-(n+2)c_{n+2}\Big]x^n\end{aligned}$$

となる．係数比較により

$$(n-2)c_n-(n+2)c_{n+2}=0$$

であり，したがって

$$\begin{aligned}c_2&=-c_0,\\c_4&=c_6=\cdots=0,\\c_{2m+1}&=\frac{2m-3}{2m+1}c_{2m-1}=\cdots=\frac{-1}{(2m+1)(2m-1)}c_1\end{aligned}$$

を得る．ゆえに一般解は

$$y=c_0\big(1-x^2\big)-c_1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)(2m-1)}x^{2m+1}$$

である． □

注意. 上のべき級数解の収束半径は1であることがすぐに確かめられる．また，少し計算すると，$|x|<1$ において

$$y(x)=c_0\big(1-x^2\big)+\frac{c_1}{2}\left(x+\frac{1-x^2}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\right)$$

であることも分かる．さらに，$|x|>1$ においては

$$y=c_0\big(1-x^2\big)+\frac{c_1}{2}\left(x+\frac{1-x^2}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$$

が解を与えることも直接計算により確かめられる．最後の関数は $x=\pm1$ において微分可能ではないため，実関数の範囲では $|x|<1$ からの自然な拡張とは言い難いが，関数の定義域を複素数にまで広げれば，適当な修正の下で自然な拡張と見なすことができる．

§ 4.4 確定特異点

定義. 線形方程式

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (\heartsuit)$$

に対し，以下のように定義する．

1. $x=a$ が $(\heartsuit)$ の**確定特異点**であるとは，$x=a$ で解析的な $p(x), q(x)$ が存在して
$$P(x)=\frac{p(x)}{x-a},\quad Q(x)=\frac{q(x)}{(x-a)^2}$$
と書けることである．
2. $x=\infty$ が $(\heartsuit)$ の**確定特異点**であるとは，$(\heartsuit)$ に変数変換 $x=t^{-1}$ を施したときに $t=0$ が確定特異点となることである．

例. Eulerの方程式

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

は，$x=0$を確定特異点に持つ最も単純な方程式である．実際，

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 0$$

と書き直せる．また，$x = t^{-1}$とすると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = -t^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} = t^4\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2t^3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

であることから，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2-a}{t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{b}{t^2}y = 0$$

となる．よって$x=\infty$も確定特異点である．

例. 線形方程式

$$y'' + \frac{x+1}{x(x+2)^2}y' - \frac{4}{x(x+2)^2}y = 0$$

の係数は$x = 0, -2$を特異点に持つ．今，

$$p(x) = \frac{x+1}{(x+2)^2}, \quad q(x) = -\frac{4x}{(x+2)^2}$$

とおけば，これらは$x=0$で解析的である．よって，$x=0$は与えられた方程式の確定特異点である．一方，$x=-2$は確定特異点ではない．

注意. $x=0$を見るとき，$p(x), q(x)$の$x=-2$における特異性は関係ないことに注意せよ．また，上の$x=-2$のように，係数の特異点だが確定特異点ではないものは**不確定特異点**と呼ばれる．

問. $x=\infty$が上の方程式の確定特異点であるか判定せよ．

○ **解法**

ここでは$x=0$を確定特異点とする線形方程式

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (\diamondsuit)$$

の解法を与える．$x=0$以外の確定特異点に対しても，平行移動によりこの場合に帰着されることに注意する．

定義. $(\diamondsuit)$に対し，その**決定方程式**を

$$\lambda(\lambda-1) + p(0)\lambda + q(0) = 0$$

で定める．

注意. 決定方程式の導出については，この後で例題で見る．$(\diamondsuit)$をEulerの方程式の変数係数版と見れば，決定方程式は割合自然なものである．Eulerの方程式の解法２も参照せよ．

定理 4.11. $(\diamondsuit)$の決定方程式の２つの解をα, β ($\mathrm{Re}\,\alpha \le \mathrm{Re}\,\beta$)とする．

1. $\beta - \alpha \ne 0, 1, 2, \ldots$のとき，$(\diamondsuit)$に対し$x=0$のまわりで
$$y_1 = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad y_2 = x^\beta \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$
の形の解の基本系が存在する．ただし$c_0 = d_0 = 1$である．
2. $\beta - \alpha = 0, 1, 2, \ldots$のとき，$(\diamondsuit)$に対し$x=0$のまわりで
$$y_1 = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + cx^\beta(\log x)\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \quad y_2 = x^\beta \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$
の形の解の基本系が存在する．ただし$\beta-\alpha=0$のときは$c = d_0 = 1$であり，$\beta - \alpha = 1, 2, 3, \ldots$のときは$c_0 = d_0 = 1$である．

証明. 本講では証明を省略する． □

例題. 常微分方程式

$$x(x+2)y'' + (x+1)y' - 4y = 0$$

に対し，確定特異点$x=0$のまわりで，解の基本系を級数表示せよ．

解法. 確定特異点まわりでの級数解を計算するには，普通は，

1. まず決定方程式の２つの解を求め，
2. それらに応じて，定理 4.11 の形の級数解を代入し，係数を決定すればよい．

しかし，ここでは決定方程式の導出を見るために，定理 4.11 の証明の手順をわざわざ繰り返すことにする．

まず，

$$y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_0 = 1,$$

の形の解を仮定する．与えられた方程式にこれを代入すると

$$\begin{aligned} 0 = x(x+2) &\sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n+\lambda-2} \\ &+ (x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+\lambda-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda} \end{aligned}$$

となり，これを整理して

$$\begin{aligned} 0 = \lambda(2\lambda-1)c_0 x^{\lambda-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\Big[&(n+\lambda-2)(n+\lambda+2)c_n \\ &+ (n+\lambda+1)(2n+2\lambda+1)c_{n+1}\Big]x^{n+\lambda} \end{aligned}$$

を得る．よって係数比較により決定方程式

$$\lambda(2\lambda-1) = 0$$

と係数c_nに関する漸化式

$$(n+\lambda+1)(2n+2\lambda+1)c_{n+1} = -(n+\lambda-2)(n+\lambda+2)c_n$$

が従う．

I. $\lambda = 0$のとき，$c_0 = 1$と漸化式

$$(n+1)(2n+1)c_{n+1} = -(n-2)(n+2)c_n$$

より

$$c_1 = 4, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = c_4 = \cdots = 0$$

を得る．

II. $\lambda = 1/2$のとき，$c_0 = 1$と漸化式

$$(2n+3)(n+1)c_{n+1} = -\frac{1}{4}(2n-3)(2n+5)c_n$$

より

$$c_1 = \frac{5}{4}, \quad c_2 = -\frac{7}{8}, \quad c_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n (2n+3)\frac{(2n-5)!!}{n!} \text{ for } n \geq 3$$

を得る．

以上のIとIIにより，解の基本系として

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + 4x + 2x^2, \\ y_2 &= x^{1/2}\left[1 + \frac{5}{4}x - \frac{7}{8}x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n (2n+3)\frac{(2n-5)!!}{n!}x^n\right] \end{aligned}$$

が得られた． □

注意． 1．$\beta-\alpha=0,1,2,\ldots$ の場合，$\lambda=\beta$ に対しては上と同様に級数解が求まるが，$\lambda=\alpha$ に対してはうまくいかない．というのも，係数を決める漸化式において，c_{n+1} の係数が途中で必ず0となってしまうからである．この場合には，$\lambda=\beta$ に対して得られた解を基にd'Alembertの階数低価法を適用することで，対数型の解が導出される．この手順はEulerの方程式に対する解法２の一般化である．

2．$x<0$ に対する非整数べき x^λ を避けたければ，これを $|x|^\lambda$ で置き換えればよい．実際，Eulerの方程式の解法２ではそのようにした．ちなみに，x^λ は複素関数としては $x<0$ に対しても問題無く定義され，そこでは $|x|^\lambda$ と複素定数倍の違いしかないので，x^λ のままでもよい．

第５章 自励系

§ 5.1 自励系の定義と例

本章に限り，独立変数を t，従属変数を $\boldsymbol{x}$ で表し，$\boldsymbol{x}$ は $\mathbb{R}^n$ に値をとるとする．

定義. 常微分方程式

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$$

が**自励系**であるとは，$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ が t によらないこと，すなわち

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

の形となることである．また，解が値をとる空間 $\mathbb{R}^n$ を**相空間**と呼び，さらに解が相空間に描く曲線 $\gamma=\{\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n;\ t\in\mathbb{R}\}$ を**解軌道**と呼ぶ．

注意． 1．非自励系であっても，

$$\begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

とすれば，いつでも自励系に書き換えられる．ただし，変数の表す意味によってはこれは適切ではないこともある．

2．本節では解の具体的表示などといった詳細な解析よりも，解軌道全体の「トポロジカルな」振る舞いに着目する．このような解の大局的挙動に関する理論を**大域理論**という．

例. 実正方行列Aを係数とする線形方程式系$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$は自励系である．より具体的に，例えば，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を考えると，一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^{-t} \\ C_2 \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

であり，解軌道は

$$\Big\{(0,0)\Big\},\quad \Big\{(0,y);\ \pm y > 0\Big\},\quad \Big\{(x,y);\ y = Cx^2,\ \pm x > 0\Big\}$$

で与えられる．

注意. 解となる定点$(0,0)$は**平衡点**と呼ばれる．すべての解は$t \to \infty$でこの点に収束するという意味で，この平衡点は**安定**である．後に$\mathbb{R}^2$上の自励系$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$の解軌道を完全に分類する．

例. Lotka–Volterra方程式とは，被食者の個体数xと捕食者の個体数yを未知関数とするモデル方程式

$$x' = ax - bxy, \quad y' = cxy - dy, \quad a,b,c,d > 0,$$

のことである．この方程式は初等的には求積できないことが知られている．しかし，$(0,0)$と$(d/c, a/b)$が平衡点であることはすぐに分かる．また**保存量**

$$H(x,y) = cx + by - d\log x - a\log y$$

を持っており，解軌道の概形を描くことができる．特に$(d/c, a/b)$以外の正値解はすべて閉曲線からなることも分かる．

問. 上の$H(x,y)$が保存量であることを示せ．

例. $\mathbb{R}^2$上の関数$H(x,\xi)$に対し，方程式系

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \xi}(x(t),\xi(t)), \quad \dot{\xi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),\xi(t))$$

を**Hamilton系**あるいは**Hamilton方程式**と呼ぶ．また，$H(x,\xi)$を**ハミルトニアン**と呼ぶ．Hamilton系では$H(x,\xi)$自身が保存量となる．実際，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(x(t),\xi(t)) &= \dot{x}(t)\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),\xi(t)) + \dot{\xi}(t)\frac{\partial H}{\partial \xi}(x(t),\xi(t)) \\ &= 0\end{aligned}$$

である．

注意. $\mathbb{R}^{2n}$上の関数$H(x,\xi)$に対してもHamilton系は拡張される．この場合，$H(x,\xi)$の等位面は，解軌道の拘束される$(2n-1)$次元超曲面を与えるだけであり，解軌道を決定するには，残りの$(2n-2)$個の保存量を見つける必要がある．

例. $\mathbb{R}$上の自由粒子に対するNewton方程式

$$m\ddot{x} = 0$$

において，$\xi = m\dot{x}$とおくと

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\xi, \quad \dot{\xi} = 0$$

となる．これはハミルトニアン

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2m}\xi^2$$

を持つHamilton系である．なお，上の方程式の解は

$$x = \frac{\xi_0}{m}t + x_0, \quad \xi = \xi_0.$$

で与えられ，これが描く解軌道は確かに$H(x,\xi)$の等位線上に乗っている．

例. $\mathbb{R}$ 上の調和振動子に対する Newton 方程式

$$m\ddot{x} = -kx$$

において，$\xi = m\dot{x}$ とおくと

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\xi, \quad \dot{\xi} = -kx$$

となる．これはハミルトニアン

$$H(x,\xi) = \frac{\xi^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

を持つ Hamilton 系である．なお，上の方程式の解は

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta\right), \quad \xi = \sqrt{mk}A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta\right)$$

で与えられ，これが描く解軌道は確かに $H(x,\xi)$ の等位線上に乗っている．

例. 振り子に対する Newton 方程式

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

において，$\omega = ml^2\dot{\theta}$ とおくと

$$\dot{\theta} = \omega/(ml^2), \quad \dot{\omega} = -mgl\sin\theta$$

となる．これはハミルトニアン

$$H(\theta,\omega) = \frac{\omega^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$

を持つ Hamilton 系である．なお，上の方程式の解は初等的には求まらないが，$H(x,\xi)$ の等位線から解軌道を描くことはできる．

例. van der Pol 方程式とは

$$x'' - \mu(1-x^2)x' + x = 0, \quad \mu > 0,$$

の形の方程式のことであり，これは **van der Pol 振動子**を記述する．$x_1 = x$，$x_2 = x'$ とおけば

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1 + \mu\left(1 - x_1^2\right)x_2$$

と書けるので，これは自励系である．この方程式の解軌道は**リミットサイクル**を持つことが知られている．

注意. これを拡張したものに FitzHugh–南雲モデル（神経細胞などの活動電位を表現するモデル）がある．

§ 5.2 相空間上のフロー

本章では，自励系の初期値問題

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{a} \qquad (\spadesuit)$$

の解の一意存在を既知とする．($\spadesuit$) の解はその初期値依存性を明示して

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a})$$

と書き，また対応する解軌道は

$$\gamma(\boldsymbol{a}) = \left\{\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^n;\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

で表す．

定理 5.1. 1. $\boldsymbol{x}(0;\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$ が成り立つ．

2. 任意の $t, s \in \mathbb{R}$ に対し $\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{a})) = \boldsymbol{x}(t+s;\boldsymbol{a})$ が成り立つ．

証明．１は初期値から自明である．２を示すために s と $\boldsymbol{a}$ を固定して

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t+s;\boldsymbol{a})$$

とおくと，

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{x}'(t+s;\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t+s;\boldsymbol{a})) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))$$

および

$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{a})$$

が成り立つ．よって初期値問題 $(\spadesuit)$ の解の一意性から

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{a}))$$

でなければならない．よって主張は示された． □

注意. 上のような性質を持つ写像 $\boldsymbol{x}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を**フロー**（**流れ**）と呼び，組 $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \boldsymbol{x})$ を**力学系**と呼ぶ．

系 5.2. 1．$t = s$ における初期値問題

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{a}$$

は一意的な解を持ち，それは $\boldsymbol{x}(t-s;\boldsymbol{a})$ で与えられる．

2．任意の s に対し，$\gamma(\boldsymbol{a}) = \gamma(\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{a}))$ が成り立つ．

3．任意の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対し，

$$\gamma(\boldsymbol{a}) = \gamma(\boldsymbol{b}) \quad \text{または} \quad \gamma(\boldsymbol{a})\cap\gamma(\boldsymbol{b}) = \emptyset$$

が成り立つ．

注意. 主張３から，相異なる２つの解軌道は交差しないことが分かる．よって特に，相空間は互いに交差しない解軌道の族で埋め尽くされる．

証明．1．定理 5.1 の主張１と同様に示せる．

2．解軌道の定義および定理 5.1 の主張２を用いると，

$$\begin{aligned}\gamma(\boldsymbol{a}) &= \{\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a});\ t\in\mathbb{R}\} = \{\boldsymbol{x}(t+s;\boldsymbol{a});\ t\in\mathbb{R}\}\\ &= \{\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{a}));\ t\in\mathbb{R}\} = \gamma(\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{a}))\end{aligned}$$

が成り立つ．

3．$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を固定する．もし $\boldsymbol{c}\in\gamma(\boldsymbol{a})\cap\gamma(\boldsymbol{b})$ がとれるなら，

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{x}(r;\boldsymbol{b})$$

を満たすような s, r が存在する．すると主張２で示したことから，

$$\gamma(\boldsymbol{a}) = \gamma(\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{a})) = \gamma(\boldsymbol{x}(r;\boldsymbol{b})) = \gamma(\boldsymbol{b})$$

が従う． □

§ 5.3 平衡点の安定性

本節でも引き続き，自励系

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad (\heartsuit)$$

について議論する．$(\heartsuit)$ の解および解軌道は，それぞれ初期値依存性を明示して，$\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a})$ および $\gamma(\boldsymbol{a})$ で表す．

定義. 1．$\boldsymbol{e}$ が $(\heartsuit)$ の**平衡点**であるとは，

$$\gamma(\boldsymbol{e}) = \{\boldsymbol{e}\}$$

が成り立つことである．

2．解軌道 $\gamma(\boldsymbol{a})$ が $(\heartsuit)$ の**周期軌道**であるとは，ある T に対して

$$\boldsymbol{x}(T;\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$$

が成り立つことである．

定理 5.3. $\boldsymbol{e}$が$(\heartsuit)$の平衡点となるための必要十分条件は,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}) = 0$$

が成り立つことである.

証明. $\boldsymbol{e}$が平衡点であれば$\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{e}) \equiv \boldsymbol{e}$なので,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{e})) = \boldsymbol{x}'(t;\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}' = 0$$

が成り立つ．一方，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}) = 0$であれば，$\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{e}$は$(\heartsuit)$の解である．よって主張は示された. □

定義. $\boldsymbol{e}$を$(\heartsuit)$の平衡点とする.

1. $\boldsymbol{e}$が**Lyapunov安定**あるいは単に**安定**であるとは，任意の$\epsilon > 0$に対し，ある$\delta > 0$が存在して任意の$\boldsymbol{a}$と$t \geq 0$に対し

$$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}| < \delta \ \Rightarrow\ |\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{e}| < \epsilon$$

が成り立つことである.

2. $\boldsymbol{e}$が**漸近安定**であるとは，安定であり，かつ，ある$\delta' > 0$が存在して任意の$\boldsymbol{a}$に対し

$$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}| < \delta' \ \Rightarrow\ \lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{e}$$

が成り立つことである.

3. $\boldsymbol{e}$が**不安定**であるとは，安定でないことである.

○ 定数係数線形方程式系

Aを実2次正方行列とする．相空間$\mathbb{R}^2$上の自励系

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} \qquad (\diamondsuit)$$

に対し，平衡点$(0,0)$の安定性を分類する.

定理 5.4. Aの固有多項式の2つの根をα, β ($\mathrm{Re}\,\alpha \leq \mathrm{Re}\,\beta$)とする.

1. $\mathrm{Re}\,\beta < 0$なら平衡点$(0,0)$は漸近安定である.
2. $\mathrm{Re}\,\beta = 0$なら平衡点$(0,0)$は漸近安定ではない.
3. $\mathrm{Re}\,\beta > 0$なら平衡点$(0,0)$は不安定である.

注意. この定理はn次元の場合にも同様に拡張される.

証明. 一般に，実2次正則行列Pに対し$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}$とおけば，$(\diamondsuit)$は

$$\boldsymbol{y}' = (P^{-1}AP)\boldsymbol{y} \qquad (\clubsuit)$$

と書き換えられる．変換$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}$は$\mathbb{R}^2$の自己同相写像かつ$(0,0)$を$(0,0)$に移すので，計算し易い$P$を選んで$(\clubsuit)$の平衡点$(0,0)$を分類すればよい．以下では,

I. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$かつ$A$が対角化可能なとき,

II. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$かつ$A$が対角化不可能なとき,

III. $\alpha, \beta \notin \mathbb{R}$のとき,

に従って場合分けを行う.

I. このとき，$P^{-1}AP$ が対角行列になるように P を選べば，($\clubsuit$) は

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\alpha t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\beta t} \end{pmatrix} \boldsymbol{y}_0$$

のように解ける．ゆえに平衡点 $(0,0)$ は次のように分類される．

(a) $0 < \alpha \leq \beta$ なら $(0,0)$ は不安定である（結節点）．

(b) $\alpha = 0 < \beta$ なら $(0,0)$ は不安定である（結節点）．

(c) $\alpha = \beta = 0$ なら $(0,0)$ は安定である．

(d) $\alpha < 0 < \beta$ なら $(0,0)$ は不安定である（鞍点あるいは鞍状点）．

(e) $\alpha < \beta = 0$ なら $(0,0)$ は安定である（結節点）．

(f) $\alpha \leq \beta < 0$ なら $(0,0)$ は漸近安定である（結節点）．

II. このとき，$P^{-1}AP$ が Jordan 標準形となるように P を選べば，($\clubsuit$) は

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\alpha t} & t\mathrm{e}^{\alpha t} \\ 0 & \mathrm{e}^{\alpha t} \end{pmatrix} \boldsymbol{y}_0$$

のように解ける．ゆえに平衡点 $(0,0)$ は次のように分類される．

(a) $0 < \alpha = \beta$ なら $(0,0)$ は不安定である（結節点）．

(b) $\alpha = \beta = 0$ なら $(0,0)$ は不安定である．

(c) $\alpha = \beta < 0$ なら $(0,0)$ は漸近安定である（結節点）．

III. このとき，$\alpha = a - \mathrm{i}b$, $\beta = a + \mathrm{i}b$ $(a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ と書け，P を適当に選べば，($\clubsuit$) は

$$\boldsymbol{y} = \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \boldsymbol{y}_0$$

のように解ける（定理 3.9 直後の**問**を参照）．ゆえに平衡点 $(0,0)$ は次のように分類される．

(a) $0 < \mathrm{Re}\,\alpha = \mathrm{Re}\,\beta$ なら $(0,0)$ は不安定である（渦状点）．

(b) $\mathrm{Re}\,\alpha = \mathrm{Re}\,\beta = 0$ なら $(0,0)$ は安定である（渦心点）．

(c) $\mathrm{Re}\,\alpha = \mathrm{Re}\,\beta < 0$ なら $(0,0)$ は漸近安定である（渦状点）．

以上，I, II, III により主張は示された． □

問. 相空間 $\mathbb{R}^2$ 上の自励系

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \quad A = \mathrm{diag}(\alpha, 0), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

に対し，$(0,0)$ 以外の平衡点をすべて求め，それらの安定性を α で分類せよ．

○ **平衡点まわりでの１次近似**

相空間$\mathbb{R}^2$上の自励系

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \qquad (\spadesuit)$$

は点(a,b)を平衡点に持つとする．すなわち，

$$f(a,b) = g(a,b) = 0 \qquad (\heartsuit)$$

とする．平衡点(a,b)の安定性を判定するために，(a,b)の近傍での**１次近似**（あるいは**線形近似**）を調べよう．Taylorの定理と$(\heartsuit)$によれば，

$$f(x,y) \approx (x-a)f_x(a,b) + (y-b)f_y(a,b),$$
$$g(x,y) \approx (x-a)g_x(a,b) + (y-b)g_y(a,b)$$

が成り立つ．よって，(a,b)の近傍で$(\spadesuit)$は

$$\boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})' \approx A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}), \qquad A = \begin{pmatrix} f_x(a,b) & f_y(a,b) \\ g_x(a,b) & g_y(a,b) \end{pmatrix}$$

の形に書ける．多くの場合，次の定理が有効である．

定理 5.5. 以上の設定の下で，Aの固有値をα, β ($\mathrm{Re}\,\alpha \le \mathrm{Re}\,\beta$)とする．

1. $\mathrm{Re}\,\beta < 0$なら平衡点(a,b)は漸近安定である．
2. $\mathrm{Re}\,\beta > 0$なら平衡点(a,b)は不安定である．

証明．本講では証明を省略する． □

注意. なお，$\mathrm{Re}\,\beta = 0$のときは，１次近似のレベルでは平衡点の安定性を判定できない．この場合，より高次の項の影響が効いてくる．

例題. Lotka–Volterra方程式

$$x' = ax - bxy, \quad y' = cxy - dy, \qquad a,b,c,d > 0,$$

の平衡点をすべて求めよ．また，それらの安定性について，１次近似のレベルで分かることを述べよ．

解．定理 5.3により

$$ax - bxy = 0, \quad cxy - dy = 0$$

を解いて，平衡点

$$(0,0), \qquad (d/c, a/b)$$

を得る．

与えられた方程式の$(0,0)$の近傍での１次近似は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' \approx \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられる．係数行列は固有値$-d$を持つので，平衡点$(0,0)$は不安定である．一方，$(d/c, a/b)$の近傍での１次近似は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' \approx \begin{pmatrix} 0 & -bd/c \\ ac/b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - d/c \\ y - a/b \end{pmatrix}$$

であり，係数行列の固有値は純虚数である．よって，平衡点$(d/c, a/b)$の安定性は１次近似のレベルでは判定できない． □

注意. 保存量を用いれば，平衡点$(d/c, a/b)$は安定なことが示せる．

第6章 解の一意存在定理

§ 6.1 主定理

本章の目的は，1階正規型常微分方程式の初期値問題

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \quad \phi(x_0) = y_0 \qquad (\spadesuit)$$

に対し，解の**一意存在定理**を正確に述べ，厳密に証明することである．

注意． 1．これまで常微分方程式の解は $y(x)$ で表してきたが，関数 $f(x, y)$ の変数 y と区別するため，以降では $\phi(x)$ で表す．

2．ここで言う解は厳密には**局所解**であり，$f(x, y)$ と (x_0, y_0) が与えられる度に，x_0 のある近傍で定義された解 $\phi(x)$ が見つかる，というものである．したがって，$f(x, y)$ は (x_0, y_0) の近傍で定義されていれば十分であり，以下では閉近傍

$$D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b], \quad a, b > 0,$$

で定義されているとする．

定理 6.1. $f(x, y)$ は D 上で連続であり，さらに次の（**一様**）**Lipschitz 条件**を満たすとする：ある $K > 0$ が存在して任意の $(x, y), (x, z) \in D$ に対し

$$|f(x, y) - f(x, z)| \le K|y - z|$$

が成り立つ．また，

$$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)|, \quad \delta = \begin{cases} \min\{a, b/M\} & \text{if } M > 0, \\ a & \text{if } M = 0 \end{cases}$$

とおく．このとき，ある C^1 級関数

$$\phi\colon [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to [y_0 - b, y_0 + b]$$

が一意的に存在して，$(\spadesuit)$ を満たす．

注意. この結果は，以下のように，常微分方程式系へと拡張される．

定理 6.2. $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ は

$$D = [x_0 - a, x_0 + a] \times \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n;\ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\| \le b\right\}, \quad a, b > 0,$$

上で連続で，さらにある $K > 0$ が存在して任意の $(x, \boldsymbol{y}), (x, \boldsymbol{z}) \in D$ に対し

$$\|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{z})\| \le K\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|$$

を満たすとする．また，

$$M = \max_{(x,\boldsymbol{y})\in D} \|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})\|, \quad \delta = \begin{cases} \min\{a, b/M\} & \text{if } M > 0, \\ a & \text{if } M = 0 \end{cases}$$

とおく．このとき，ある C^1 級関数

$$\boldsymbol{\phi}\colon [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n;\ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\| \le b\right\}$$

が一意的に存在して，

$$\boldsymbol{\phi}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\phi}(x)), \quad \boldsymbol{\phi}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$$

を満たす．

注意. 1. 第1章で見たように，高階の正規型方程式はいつでも1階の正規型方程式系に書き換えられる．それに定理 6.2を適用することで，高階正規型方程式の初期値問題の解の一意存在も従う．

2. 定理 6.2の証明は定理 6.1のそれと全く同様なので，省略する．定理 6.1の証明は以下の第6.3節で与えられる．

3. 上で述べられている解の一意性は局所解の一意性であるが，解の存在する範囲で定理を繰り返し適用して，一意性の成り立つ区間を延長していくことで，大域的な一意性も従う．

4. Lipschitz条件が無ければ解の一意性が保証されないことは，既に第1章の例で確認した．

§ 6.2 Lipschitz条件に対する十分条件

定義. 関数$g(y)$が区間I上で**Lipschitz連続**であるとは，ある$K>0$が存在して，任意の$y,z\in I$に対し

$$|g(y)-g(z)|\le K|y-z|$$

が成り立つことである．

例. 関数

$$g(y)=\begin{cases}\sqrt{y} & y\ge 0,\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

は0を内部に含む任意の区間上でLipschitz連続ではない．実際，

$$\lim_{y\to+0}\frac{|g(y)-g(0)|}{|y-0|}=\lim_{y\to+0}\frac{1}{\sqrt{y}}=\infty$$

なので，条件を満たす$K>0$は存在しない．

定理 6.3. 1. 関数$g(y)$が有界閉区間I上でC^1級であれば，$g(y)$はI上でLipschitz連続である．

2. 関数$g(y)$が区間I上でLipschitz連続であれば，$g(y)$はI上でC^0級，すなわち，連続である．

注意. 粗く言って，

$$C^1\text{級} \;\Rightarrow\; \text{Lipschitz連続} \;\Rightarrow\; C^0\text{級}$$

が分かる．特に，C^1級であることはLipschitz連続であるための十分条件である．

証明. 1. $g'(y)$は有界閉区間I上で連続であるから，$|g'(y)|$もそうであり，特に

$$K=\max_{y\in I}|g(y)|<\infty$$

が存在する．すると，任意の$y,z\in I$に対して，平均値の定理よりある$\theta\in(0,1)$が存在して

$$|g(y)-g(z)|=\left|g'(z+\theta(y-z))\right||y-z|\le K|y-z|$$

が成り立つ．

2. Lipschitz連続性の定義より，任意の$y\in I$に対して

$$\limsup_{z\to y}|g(z)-g(y)|\le K\limsup_{z\to y}|z-y|=0$$

が成り立つ．よって$g(y)$はI上でC^0級である． □

系 6.4. I, Jを有界閉区間とする．$f(x,y)$が$I\times J$上でC^1級であれば，もちろん$f(x,y)$は$I\times J$上で連続であり，さらにある$K>0$が存在して，任意の$(x,y),(x,z)\in I\times J$に対し

$$|f(x,y)-f(x,z)|\le K|y-z|$$

が成り立つ．

証明．定理 6.3と同様に証明できる．詳細は**問**とする． □

注意． 1．系 6.4により，$f(x,y)$が定理 6.1の仮定を満たすには，C^1級であれば十分である．

2．参考のため，次の２つの条件(a), (b)を比較してみる．

(a) $\exists K>0$ s.t. $\forall x\in I\ \ \forall y,z\in J\ \ |f(x,y)-f(x,z)|\le K|y-z|$.

(b) $\forall x\in I\ \ \exists K>0$ s.t. $\forall y,z\in J\ \ |f(x,y)-f(x,z)|\le K|y-z|$.

一様Lipschitz条件は論理式(a)に対応しており,「一様」という修飾語は「Kをxによらずに一様にとれること」を意味する．一方，(b)はKがxによって変わることを許容しており，(a)より弱い条件である．厳密な議論をする際には，このような微妙な違いを理解しておく必要がある．

§ 6.3 主定理の証明

本節では，定理 6.1の証明を与える．局所解$\phi(x)$は**逐次近似法**により，**構成的に**得られる．そのあらましを述べておく．まず(♠)を積分方程式

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\phi(\xi))\,\mathrm{d}\xi$$

に書き換える．この積分方程式を逐次的に解くために，帰納的に

$$\phi_0(x)\equiv y_0,\quad \phi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\phi_{n-1}(\xi))\,\mathrm{d}\xi\quad \text{for } n=1,2,\ldots$$

と定め，適当な意味での極限

$$\phi(x)=\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)$$

が存在することを示す．そして，$\phi_n(x)$の定義式で$n\to\infty$とすると，$\phi(x)$が所望の積分方程式の解となっている，という流れである．

定理 6.1の証明．以下，$I=[x_0-\delta,x_0+\delta], J=[y_0-b,y_0+b]$とおく．

Step 1. あるC^0級関数$\phi\colon I\to J$が存在して

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\phi(\xi))\,\mathrm{d}\xi \tag{♡}$$

を満たすことを示せばよい．実際，このとき(♡)から$\phi(x)$はC^1級であることが分かり，さらに両辺を微分する，あるいは，$x=x_0$を代入することで，(♠)が従う．また(♠)を満たす別のC^1級関数$\psi\colon I\to J$があったとすると，$\psi(x)$も(♡)を満たすので，Lipschitz条件から

$$\begin{aligned}|\phi(x)-\psi(x)| &\le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\phi(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))\right|\mathrm{d}\xi\right| \\ &\le K\left|\int_{x_0}^{x}|\phi(\xi)-\psi(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\right|\end{aligned} \tag{♢}$$

を得る．これからまず

$$|\phi(x)-\psi(x)| \le K|x-x_0|\sup_{\xi\in I}|\phi(\xi)-\psi(\xi)|$$

となるが，これを$(\diamondsuit)$の右辺に代入すると，さらに

$$|\phi(x)-\psi(x)| \le \frac{K^2|x-x_0|^2}{2}\sup_{\xi\in I}|\phi(\xi)-\psi(\xi)|$$

となる．繰り返すと，任意の$n\in\mathbb{N}$に対して

$$|\phi(x)-\psi(x)| \le \frac{K^n|x-x_0|^n}{n!}\sup_{\xi\in I}|\phi(\xi)-\psi(\xi)|$$

が成り立ち，ここで$n\to\infty$とすることで$\phi(x)\equiv\psi(x)$が従う．よって一意性も示された．

Step 2. $(\heartsuit)$の解$\phi(x)$を，逐次近似

$$\phi_0(x)\equiv y_0, \quad \phi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\phi_{n-1}(\xi))\,\mathrm{d}\xi$$

の極限として構成したい．ここで$\phi_n(x)$が定義されるためには，$\phi_{n-1}(x)$の値域がJに含まれていなければならない．これを帰納法で確かめよう．$\phi_0(x)$については，$\phi_0(x)\equiv y_0$なので上の主張は自明である．いま，$\phi_{n-1}(x)$の値域がJに含まれているとすると，Mとδの定め方から

$$|\phi_n(x)-y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\xi,\phi_{n-1}(\xi))\,\mathrm{d}\xi\right| \le M|x-x_0| \le b$$

が従う．よって，帰納法により上の主張が示された．

Step 3. 次に，関数列$\phi_n(x)$はある関数$\phi(x)$にI上で一様収束することを示す．そのために，

$$\phi_n(x)=\phi_0(x)+\sum_{m=1}^{n}(\phi_m(x)-\phi_{m-1}(x)) \qquad (\clubsuit)$$

と書き直し，$n\to\infty$のとき，$(\clubsuit)$の右辺第2項の定める級数が，xによらない収束優級数を持つことを示す．まず，$\phi_1(x)$の定義から

$$|\phi_1(x)-\phi_0(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\xi,\phi_0(\xi))\,\mathrm{d}\xi\right| \le M|x-x_0|$$

である．今，一般の$n\ge 2$に対して，Lipschitz条件から

$$\begin{aligned}|\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)| &\le \left|\int_{x_0}^{x}\left[f(\xi,\phi_{n-1}(\xi))-f(\xi,\phi_{n-2}(\xi))\right]\mathrm{d}\xi\right| \\ &\le K\left|\int_{x_0}^{x}|\phi_{n-1}(\xi)-\phi_{n-2}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\right|\end{aligned}$$

であることに注意する．$n=2$として，上の2つの評価を組み合わせると

$$|\phi_2(x)-\phi_1(x)| \le \frac{MK|x-x_0|^2}{2}$$

を得る．$n=3$に対しては，$n=2$のときの結果を用いて

$$|\phi_3(x)-\phi_2(x)| \le \frac{MK^2|x-x_0|^3}{3!}$$

を得る．繰り返すことで，一般のnに対して

$$|\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)| \le \frac{MK^{n-1}|x-x_0|^n}{n!} \le \frac{MK^{n-1}\delta^n}{n!}$$

が分かる．すると，

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{MK^{m-1}\delta^m}{m!} = \frac{M}{K}\left(\mathrm{e}^{K\delta}-1\right) < \infty$$

および**WeierstrassのM判定法**（次節で補足）により，$(\clubsuit)$の右辺，したがって左辺は，$n\to\infty$のときにある関数$\phi(x)$に一様収束することが従う．

Step 4. Step 3で得た$\phi(x)$がStep 1の解となっていることを示す．実際，まず$\phi(x)$は連続関数列$\phi_n(x)$の一様収束極限なので連続であり，値域もJに含まれている．今，

$$\phi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi_n(\xi))\,\mathrm{d}\xi$$

において$n \to \infty$としてみよう．左辺が$\phi(x)$に収束することは自明である．右辺については，Lipschitz条件および一様収束の定義から

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi(\xi))\,\mathrm{d}\xi - \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi_n(\xi))\,\mathrm{d}\xi\right| &\le K|x - x_0| \sup_{\xi\in I} |\phi_n(\xi) - \phi(\xi)| \\ &\le K\delta \sup_{\xi\in I} |\phi_n(\xi) - \phi(\xi)| \\ &\to 0\end{aligned}$$

である．よって$\phi(x)$は$(\heartsuit)$を満たす． □

§ 6.4 補足：WeierstrassのM判定法

○ **関数の一様収束**

定義. $\phi_n, \phi\colon I \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$ とする．

1. 関数列$(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$が$\phi$に**各点収束**するとは，任意の$x \in I$に対し
$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x)$$
が成り立つことである．
2. 関数列$(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$が$\phi$に**一様収束**するとは，任意の$\epsilon > 0$に対しある$N \ge 0$が存在して，任意の$n \ge N$と$x \in I$に対し
$$|\phi_n(x) - \phi(x)| < \epsilon$$
が成り立つことである．

注意. 上の各点収束を論理記号で表現すれば，

$$\forall x \in I \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \ge 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall n \ge N \quad |\phi_n(x) - \phi(x)| < \epsilon$$

であり，また一様収束は

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \ge 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall n \ge N \quad \forall x \in I \quad |\phi_n(x) - \phi(x)| < \epsilon$$

である．後者は前者より強い性質である．「$\forall x \in I$」の位置の違いによる意味の違いに注意せよ．

定理 6.5. $\phi_n, \phi\colon I \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$ とする．ϕ_nがI上で連続かつ$(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$が$\phi$に一様収束すれば，$\phi$も$I$上で連続である．

証明. 任意の$x \in I$においてϕが連続であることを示せばよい．任意の$\epsilon > 0$をとる．このとき，一様収束の定義より，ある$N \ge 0$が存在して，任意の$n \ge N$と$y \in I$に対し

$$|\phi_n(y) - \phi(y)| < \epsilon$$

が成り立つ．さて$n \ge N$を一つ固定しよう．するとϕ_nはI上で連続なので，ある$\delta > 0$が存在して，$|x - y| < \delta$ならば

$$|\phi_n(x) - \phi_n(y)| < \epsilon$$

が成り立つ．よって，$|x - y| < \delta$ならば

$$\begin{aligned}|\phi(x) - \phi(y)| &\le |\phi(x) - \phi_n(x)| + |\phi_n(x) - \phi_n(y)| + |\phi_n(y) - \phi(y)| \\ &< 3\epsilon\end{aligned}$$

が成り立ち，主張が従う． □

○ **WeierstrassのM判定法**

定義. 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が**Cauchy列**であるとは,

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall n, k \geq N \quad \|a_n - a_k\| < \epsilon$$

が成り立つことである.

定理 6.6. 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束列となるための必要十分条件は, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がCauchy列となることである.

証明. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が α に収束するなら, $n, k \to \infty$ のとき,

$$\|a_n - a_k\| \leq \|a_n - \alpha\| + \|\alpha - a_k\| \to 0$$

となる. よって $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はCauchy列である（詳細は省略する）. 逆は実数の連続性公理を用いて証明されるが, 本講では省略する. □

定理 6.7 (WeierstrassのM判定法). $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を I 上の関数列とする. このとき, もしある非負値実数列 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して

$$|\phi_n(x)| \leq M_n \quad \text{for all } x \in I, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

が成り立つならば, 関数項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$$

は I 上のある関数に I 上で一様収束する.

証明. まず各 $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{n} \phi_k$$

と定め, 各点極限を用いて一様収束先の候補を構成しよう. 任意の $x \in I$ を固定する. $n > m \to \infty$ のとき

$$|\Phi_n(x) - \Phi_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |\phi_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k \to 0 \qquad (\spadesuit)$$

なので, 数列 $(\Phi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ はCauchy列であり, 収束する. よって各点極限

$$\Phi(x) := \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$$

が存在する. すると, $(\spadesuit)$ において $n \to \infty$ とすることで, 任意の $x \in I$ と $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$|\Phi(x) - \Phi_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} M_k$$

が成り立つ. ここで $m \to \infty$ とすると, 右辺は $x \in I$ に依らず一様に0に収束する. これは関数列 $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Φ に一様収束することを意味する. □