# 対数的シンプレクテック多様体の変型とパンルベ型方程式

齋藤 政彦 (神戸大学理学部)

## 0. ABSTRACT

パンルベ方程式系が，ある種の有理曲面とその反標準因子の組の特別な変型から得られる事を示し, その高次元化について考察する.

## 1. パンルベ方程式

まずパンルベ方程式とは何かを From Gauss to Painlevé [IKSY] 3 章に従って簡単に説明したい．([3.1, Ch. 3, [IKSY]]).

次の代数的常微分方程式を考えよう．

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \cdots, \frac{d^nx}{dt^n}) = 0. \tag{1}$$

ただし，

$$F(t, x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{C}(t)[x_0, x_1, \cdots, x_n]\ ,$$

すなわち，$F(t, \mathrm{x})$ は $\mathrm{x} = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ について多項式であり $t$ については有理式とする. 初期値空間の点

$$(t_0, \mathbf{c}_0) = (t_0, c_0, c_1, \cdots, c_n) \in \{(t_0, \mathbf{c}_0) \in \mathbf{C}^{n+2} | F(t_0, c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0\}$$

を定め，方程式 $(1)$ の 解 $x(t) = \varphi(t)$ で

$$\frac{d^i\varphi}{dt^i}(t_0) = c_i, \quad (i = 0, \ldots, n). \tag{2}$$

を満たすものを求めるコーシー問題を考えよう．ここで, 解を解析接続したものも $\varphi(t)$ と書く事にする．もし, 常微分方程式 $(1)$ が線型であれば，解 $\varphi(t)$ の特異点は, 常微分方程式の係数の特異性から完全に決定でき, その初期値 $(t_0, \mathbf{c}_0)$ にはよらない．この種の解の特異点を 動かない特異点 *(non-movable singularities)* と呼ぶ.

一方, 常微分方程式 $(1)$ が非線型ならば, 解が初期値に依存する特異点をもつ可能性がでてくるが, この様な特異点を 動く特異点 *(movable singulairities)* と呼ぶ. 例えば, $x' = dx/dt$ と置く時, 有名な常微分方程式

$$(x')^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \quad g_2, g_3 \in \mathbf{C},\ g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0. \tag{3}$$

を考えよう.

楕円曲線 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ の正規化された周期を $\tau \in \mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} | \operatorname{Im} z > 0\}$ とするとき, それに対応する ワイエルストラスの $\wp$-関数を

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2-(0,0)} \left( \frac{1}{(z - m - n\tau)^2} - \frac{1}{(m + n\tau)^2} \right)$$

*Date*: November, 16, 2001.

Partly supported by Grant-in Aid for Scientific Research (B-09440015), (B-12440008) and (C-11874008), the Ministry of Education, Science and Culture, Japan .

2001 年代数学シンポジューム報告集, 大阪大学理学研究科, 2001 年 8 月 1 日.

で定義する時, これは, 周期 $\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$ を持つ $\mathbf{C}$ 上の有理周期関数である．$(t,x,x')=(0,a,b)\in\mathbf{C}^3$ で $b^2=4a^3-g_2a-g_3$ なる初期値を取り, 微分方程式 $(3)$ を考える．その解は

$$x(t)=\wp(t+c)$$

( ただし $c\in\mathbf{C}$ は $a=\wp(c)$, $b=\wp'(c)$ なる条件で定める). 良く知られている様に $\wp(t)$ は $t\equiv 0 \mod \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$ で 2 位の極を有する. よって, 解 $x(t)=\wp(t+c)$ は $t\equiv -c \mod \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$ で 2 位の極を持つ. この $c$ は初期値に依存して決まり, この意味で動く特異点をもつ．一般には, 非線型常微分方程式の解の動く特異点として, 分岐点や真性特異点が現れる事もあるが, 上記の様に, 全て有限位数の極である場合を良い非線型方程式のクラスとするのがパンルベ性の定義である．このパンルベ性は, Sofya Kovalevskaya のコマの運動の研究以来, 「可積分性の良い判定法」として考えられている．

定義 **1.1**. 代数的常微分方程式 $(1)$ の一般的な解の動く特異点が極しかない時，方程式 $(1)$ は パンルベ性 *(Painlevé property)* を持つという．

定理 **1.1**. *(L. Fuchs, H. Poincaré).* パンルベ性を持つ代数的微分方程式 *(1)* は, $n=1$, すなわち一階の時, 時間変数 $t$ の正則変換と, $x$ の一次分数変換で, 次の方程式に帰着する．

(1) **Weierstrass** $\wp$ 関数の満たす微分方程式 .

$$(x')^2=4x^3-g_2x-g_3 \tag{4}$$

(2) **Riccati** 方程式

$$x'=a(t)x^2+b(t)x+c(t). \tag{5}$$

注意 **1.1**. $a(t)\not\equiv 0$ の時, よく知られている様に従属変数の変数変換

$$x=-\frac{1}{a(t)}\frac{d}{dt}\log(u)=-\frac{1}{a(t)}\frac{u'}{u}, \tag{6}$$

により *Riccati* 方程式 *(5)* は次の 2 階線型方程式に帰着する.

$$u''-[\frac{a'(t)}{a(t)}+b(t)]u'+a(t)c(t)u=0. \tag{7}$$

*(7)* の解 $u(t)$ は動かない特異点のみをもちまた $x(t)$ の動く特異点は, *(6)* により $u(t)$ のゼロ点である. $u(t)$ のゼロ点の位数は有限であるから解 $x(t)$ の動く特異点は極のみである．

パンルベ性を持つ常微分方程式の分類問題を, $n\geq 2$ の場合に拡張しようというのは非常に難しい問題だと思われていたが，20 世紀初頭にパンルベ ( Paul Painlevé (1863–1933) が $n=2$ の場合に「パンルベ方程式」を次の様に定義し分類に挑んだ．

定義 **1.2**. パンルベ方程式とは $2$ 階の代数的常微分方程式で有理形のもの, すなわち

$$x''=R(x,x',t),\quad R(x,y,t)\in\mathbf{C}(x,y,t) \tag{8}$$

の形の方程式でパンルベ性を持つもの事である．

パンルベは彼の学生 B.O. Gambier の協力を得てパンルベ方程式が適当な変換により求積法で解かれるか線型方程式に帰着するか, もしくは Table 1 にある 6 つのタイプの方程式 $P_J$, $J=I,II,III,IV,V,VI$ に帰着する事を示した．ここで $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は複素パラメーターである．

梅村浩らによるパンルベ方程式の既約性の証明等, それ自身の [IKSY] 以後の重要な進展は [U] 等を参照していただく事にして, 近年, パンルベ方程式は数学および数理物理学の多くの分野に出現している事を少し述べたい．

一つの典型的例は，$\mathbf{P}^1$ 上の線型常微分方程式系のモノドロミー保存変型からパンルベ方程式が導かれる事が挙げられる．（詳しくは ([IKSY]) を参照の事）. これは，幾何学的にいうと, $\mathbf{P}^1$ 上のベクトル束とその上の平坦接続で，適当な極を許し, その対応するモノドロミーを固定した組のモジュライ空間（= モノドロミー保存変型）と考えられる．種数一般の時に確定特異点型の時は岩崎 [I] にモジュライ空間の一般論がある .( $\mathbf{P}^1$ 上で確定特異点でないときも含めると, 神保, 三輪, 上野 [JMU] や, 神保, 三輪の理論 [JM1], [JM2] があるが, 最近 Philip Boalch[Bo] がその幾何学的なモジュライ空間の構成とシンプレクテック構造を取り扱っている. )

C. Simpson の理論を極のある場合に拡張できれば，それらはベクトル束 $E$ とその上の Higgs 場 $\theta \in Hom_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}}(E, E \otimes \Omega^1_{\mathbf{P}^1})$ で極を許す場合のモジュライ空間の上の Hitchin 系という可積分系の変型と思えるはずである．(これらのコンパクト化の理論の進展が望まれる.)

統計物理における, Ising 模型の相関関数との重要な関係 ([J]) もある. さらに齋藤恭司の孤立特異点の変型空間の上の平坦構造の理論, また近年, それを一般化，公理化した B. Dubrovin のフロベニウス構造やフロベニウス多様体の理論がモノドロミー保存変型や量子コホモロジーの結合律である WDVV 方程式の関連から注目されている．さらにモノドロミー保存変型との関係からパンルベ方程式との関係が注目されている．この点については，文献 [Du] や [Ma1], およびそこに挙がっている膨大な論文リストを参照されたい．

$$
\begin{aligned}
P_I: \quad & \frac{d^2x}{dt^2} &&= 6x^2+t,\\
P_{II}: \quad & \frac{d^2x}{dt^2} &&= 2x^3+tx+\alpha,\\
P_{III}: \quad & \frac{d^2x}{dt^2} &&= \frac{1}{x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{1}{t}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{t}(\alpha x^2+\beta)+\gamma x^3+\frac{\delta}{x},\\
P_{IV}: \quad & \frac{d^2x}{dt^2} &&= \frac{1}{2x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{3}{2}x^3+4tx^2+2(t^2-\alpha)x+\frac{\beta}{x},\\
P_V: \quad & \frac{d^2x}{dt^2} &&= \left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{1}{t}\frac{dx}{dt}+\frac{(x-1)^2}{t^2}\left(\alpha x+\frac{\beta}{x}\right)\\
& && \qquad +\gamma\frac{x}{t}+\delta\frac{x(x+1)}{x-1},\\
P_{VI}: \quad & \frac{d^2x}{dt^2} &&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-t}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{x-t}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right),\\
& && \quad +\frac{x(x-1)(x-t)}{t^2(t-1)^2}\left[\alpha-\beta\frac{t}{x^2}+\gamma\frac{t-1}{(x-1)^2}+\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\frac{t(t-1)}{(x-t)^2}\right].
\end{aligned}
$$

TABLE 1

## 2. パンルベ 方程式とその岡本初期値空間

パンルベ方程式の初期値空間を組織的に研究し，その重要性を示したのは岡本和夫の一連の仕事である．([OkaT], [O1] を参照の事). 初期値空間は，ある代数曲面なのであるが, これを，代数幾何の立場で見直し，後で初期値空間の一般化である「岡本・パンルベ対」の概念を導入する．

まず各パンルベ方程式 $P_J$ が次のハミルトン系 $H_J$ と同値である事を思い出す．([Mal], [O1], [IKSY], [MMT]):

$$
(H_J): \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= \dfrac{\partial H_J}{\partial y},\\[2ex] \dfrac{dy}{dt} &= -\dfrac{\partial H_J}{\partial x}, \end{cases} \tag{9}
$$

ここで各ハミルトニアン $H_J = H_J(x,y,t)$ は次の表 TABLE 2 により与えられる．

さてハミルトン系 $H_J$ を考えよう．$\Sigma_J = \{a_1, \ldots, a_l\} \subset \mathbf{C}$ を $(H_J)$ の動かない特異点（方程式系の特異点）とし，

$$
B_J = \mathbf{C} - \Sigma_J = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[t, \frac{1}{t-a_1}, \ldots, \frac{1}{t-a_l}].
$$

と置く.

$$
\begin{aligned}
H_I(x,y,t) &= \frac{1}{2}y^2 - 2x^3 - tx,\\
H_{II}(x,y,t) &= \frac{1}{2}y^2 - \left(x^2 + \frac{t}{2}\right)y - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x,\\
H_{III}(x,y,t) &= \frac{1}{t}\left[2x^2y^2 - \left\{2\eta_\infty t x^2 + (2\kappa_0+1)x - 2\eta_0 t\right\}y + \eta_\infty\left(\kappa_0+\kappa_\infty\right)tx\right],\\
H_{IV}(x,y,t) &= 2xy^2 - \left\{x^2 + 2tx + 2\kappa_0\right\}y + \kappa_\infty x,\\
H_V(x,y,t) &= \frac{1}{t}\left[x(x-1)^2y^2 - \left\{\kappa_0(x-1)^2 + \kappa_t x(x-1) - \eta t x\right\}y + \kappa_\infty(x-1)\right],\\
&\quad \left(\kappa := \frac{1}{4}\left\{(\kappa_0+\kappa_t)^2 - \kappa_\infty^2\right\}\right),\\
H_{VI}(x,y,t) &= \frac{1}{t(t-1)}\left[x(x-1)(x-t)y^2 - \{\kappa_0(x-1)(x-t)\right.\\
&\quad \left. +\kappa_1 x(x-t) + (\kappa_t - 1)x(x-1)\right\}y + \kappa_\infty(x-t)]\\
&\quad \left(\kappa := \frac{1}{4}\left\{(\kappa_0+\kappa_1+\kappa_t-1)^2 - \kappa_\infty^2\right\}\right).
\end{aligned}
$$

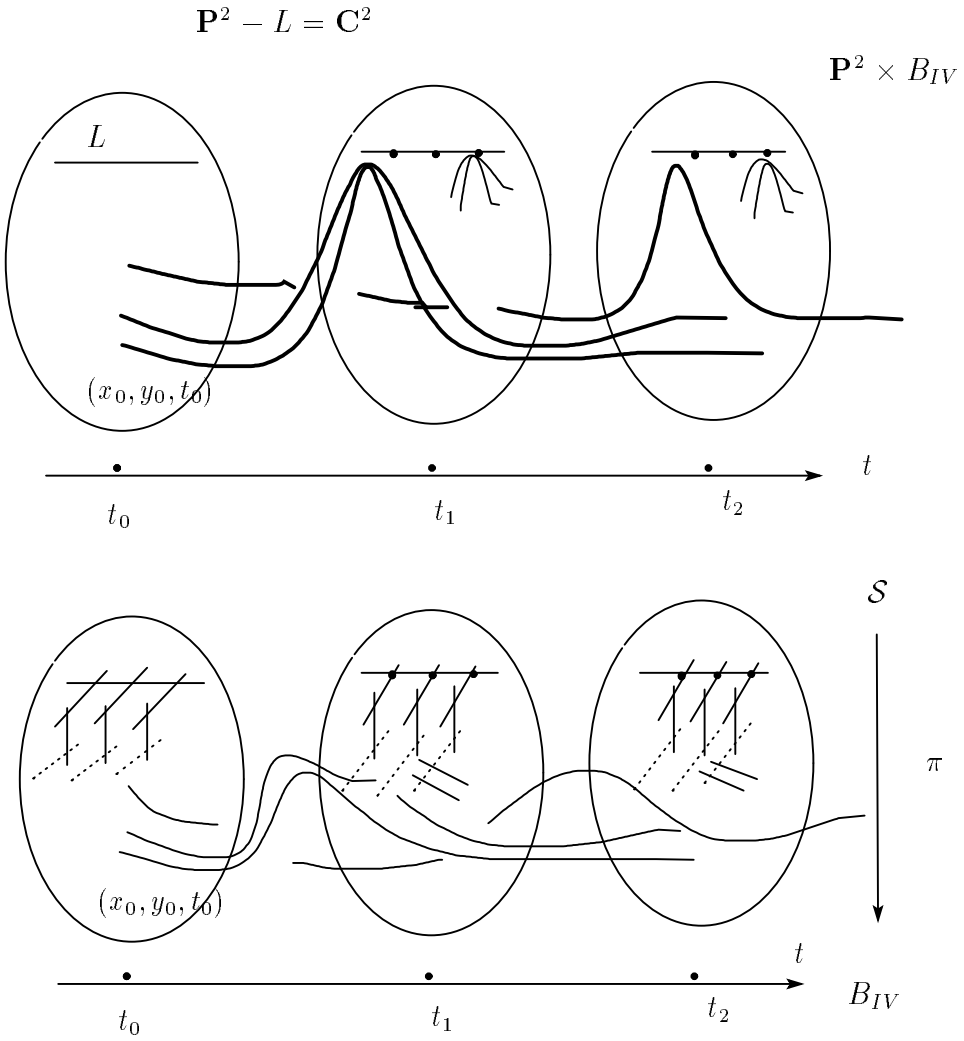
TABLE 2

空間 $\mathbf{C}^2 \times B_J \ni (x,y,t)$ と 自然な射影 $\pi : \mathbf{C}^2 \times B_J \longrightarrow B_J$ を考える. 直積空間 $\mathbf{C}^2 \times B_J \ni (x,y,t)$ 上でハミルトン系 $(H_J)$ を考える事ができるが，$\pi$ の相対コンパクト化を考える．

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{C}^2 \times B_J & \hookrightarrow & \mathbf{P}^2 \times B_J \\
\downarrow & & \downarrow \\
B_J & = & B_J
\end{array}
\tag{10}
$$

$(H_J)$ がパンルベ性を持つとすると $(H_J)$ の全ての解の動く特異点は極のみである．$(H_J)$ の解曲線 $(x(t),y(t),t)$ で ある初期値 $(x_0,y_0,t_0) \in \mathbf{C}^2 \times B_J$ から出発するものは，ある初期値 $(x_0,y_0,t_0)$ に依存する時間 $t_1 \in B_J$ で無限遠に発散するがそれはパンルベ性より極である. $\mathbf{P}^2$ が固有的であるから 解曲線は $\mathbf{P}^2 \times B_J$ の点に極限を定める．

$L = \mathbf{P}^2 - \mathbf{C}^2$ を無限遠直線とするとき, この解曲線は内点 $(x_0,y_0,t_0) \in \mathbf{C}^2 \times B_J$ から出発し境界 $L \times \{t_1\}$ の点を通る．$t_1 \in B$ の近傍で $L$ とこの解が交わるのは $t_1$ のみであることが示されるがこのような特異点を accessible 特異点 と呼ぶ．([Ki]). 古典的なパンルベ方程式 $P_J$ もしくはそれと同値なハミルトン系 $(H_J)$ に対しては各固定された $t = t_1$ に対し有限個の accessible 特異点しかない事が分かり, よって無限個の解曲線がそれらの点に集まっている．岡本は [O1] においてこれらの特異点を解析し，それらが accessible 特異点およびその infintely near points のブローアップによって解消され，内点から出発する解曲線がすべて分離された曲線にできる事を示した．( FIGURE ??を参照). より正確には $\mathbf{P}^2 \times B_J$ の何回かのブローアップの連続




により, 次のような smooth 射 $\pi : \mathcal{S} \longrightarrow B_J$ が得られる事を示した．

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^2 \times B_J & \stackrel{\tau}{\leftarrow} & \mathcal{S} \\ \downarrow & \swarrow \pi & \\ B_J & & \end{array} \tag{11}$$

このファミリーに関して次の命題が成り立つが容易に分かる. ( [O1]), ([Sakai]), [STa], [STT]).

命題 **2.1.** $B_J$ の一般の点 $t$ において, そのファイバー $S = \mathcal{S}_t$ は $\mathbf{P}^2$ 内の $L$ の $9$ 点 *(Infinitely near point* を含む*)* のブローアップにより得られる．$S = \mathcal{S}_t$ の反標準因子 $-K_S$ は有効因子 $Y = \sum_{i=1}^{r} m_i Y_i$ で与えられる．また $Y$ のコンフィギュレーションは小平–*Néron* の加法的な特異楕円曲線の極小モデルの閉ファイバーのコンフィギュレーションと同型． *(Figure 2* を参照. コンフィギュレーションの名前はアファインデンキン図形の名前で表した.*)*

ここで $\tilde{D}_7, \tilde{D}_8$ 形が，岡本の論文 [O1] に現れない事を注意しておく．これらは，パンルベ III 型 $P_{III}$ のパラメータが特別な場合としてでてくる．また，$\tilde{D}_8$ の場合は $S - Y$ に $\mathbf{C}^2$ が含まれない事にも注意しておく．([Sakai], [STa]).

いうまでもないが，Figure 2 に置いて実線は非特異有理曲線 $C \simeq \mathbf{P}^1$ で $C^2 = -2$ なるもの ($-2$-曲線) を表し，また曲線の横の数字はその曲線 $Y = -K_S$ の中での重複度を表す．

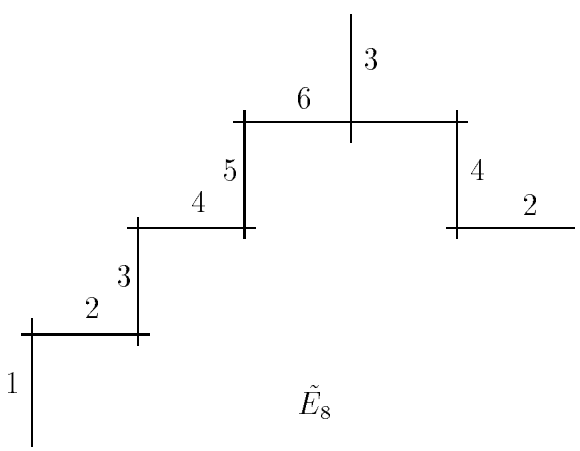
さて

$$-K_S = Y = \sum_{i=1}^{r} m_i Y_i.$$

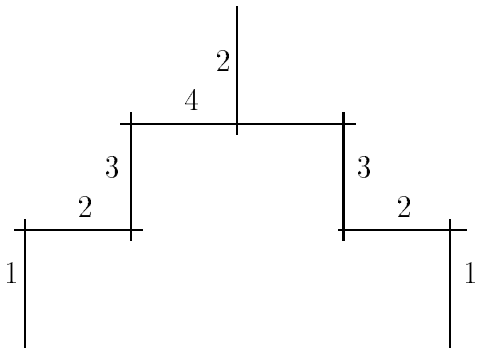
と既約分解する時，$S$ が有理曲面と仮定すると $Y$ のコンフィギュレーションが特異楕円曲線の小平–Néron モデルになるためには次の数値的条件が必要十分である事がわかる．(cf. [Kod], [STa]).

$$\boxed{\deg -(K_S)_{|Y_i} = -K_S \cdot Y_i = Y \cdot Y_i = 0 \quad \text{for all } i, \ \ 1 \leq i \leq m}. \tag{12}$$

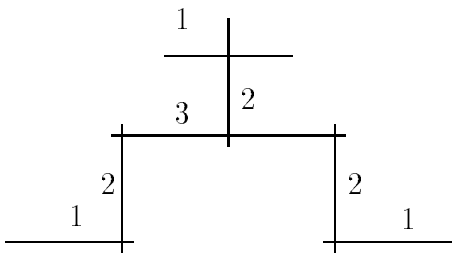
ここで，上に現れる有理曲面 $S$ は楕円曲面ではない事に注意しておく．実際，$Y_{red}$ はサイクルを含まず (加法的)，完備一次系 $|-K_S| = |Y|$ の次元が 0 である事が示される．もし $S'$ が有理楕円曲面であり $-K_{S'} = Y'$ であり，$Y'$ が加法的であれば $|-K_{S'}| = |Y| \simeq \mathbf{P}^1$ となるからである．



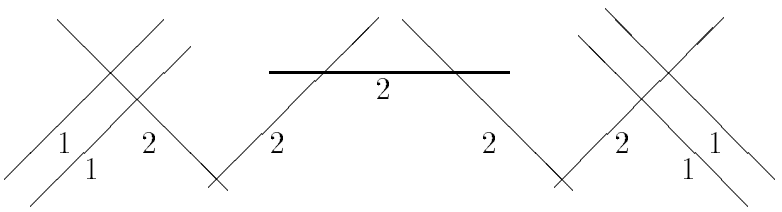

$\tilde{E}_8$



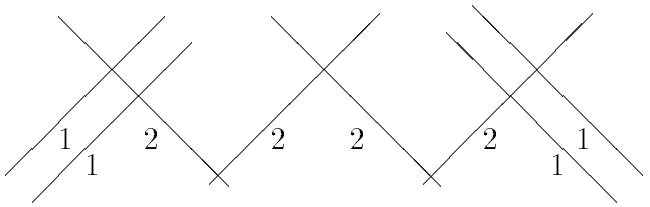

$\tilde{E}_7$



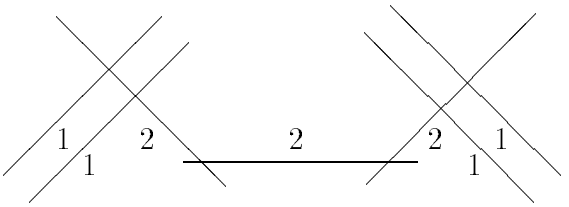

$\tilde{E}_6$



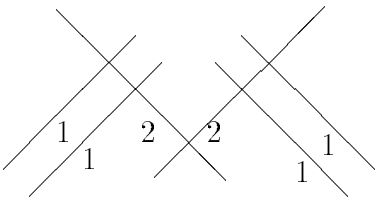

$\tilde{D}_8$



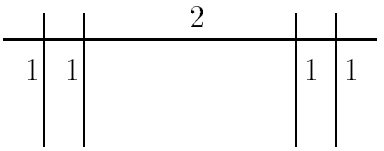

$\tilde{D}_7$




$\tilde{D}_6$




$\tilde{D}_5$




$\tilde{D}_4$

FIGURE 1

## 3. 岡本・パンルベ対

岡本の構成を少し一般化すると次の様な自然な定義が得られる．この定義が何故妥当かは，第 7 章で説明する.

定義 **3.1.** $(S, Y)$ を非特異射影的複素曲面 $S$ とその (正 ) 反標準因子 $Y \in |-K_S|$ の組とし, $Y = \sum_{i=1}^{r} m_i Y_i$ をその既約分解とする. $(S, Y)$ が次の条件 (13) をみたすとき, ( 一般化された ) 岡本・パンルベ対 という.

すべての $i, 1 \leq i \leq r$ に対して

$$\boxed{-K_S \cdot Y_i = Y \cdot Y_i = \deg Y_{|Y_i} = 0.} \tag{13}$$

岡本・パンルベ対 $(S, Y)$ は $S$ が有理曲面の時 有理的 と呼ばれる. 以後有理的岡本・パンルベ対のみを考える.

次の命題は標準的な議論から分かる.

命題 **3.1.** (1) $(S, Y)$ を有理的な岡本・パンルベ対とすると $S$ は $\mathbf{P}^2$ の $9$ 点ブローアップで得られる．

(2) 全ての自然数 $n$ について $\dim |-nK_S| = \dim |nY| \leq 1$ ．

(3) もし $\dim |-nK_S| = \dim |nY| = 1$ $n \geq 1$ であれば, $f^*(\infty) = nY$ を満たす有理的楕円曲面の構造 $f : S \longrightarrow \mathbf{P}^1$ が存在する.

定義 **3.2.** 有理的な岡本・パンルベ対 $(S, Y)$ はある自然数 $n$ について $f^*(\infty) = nY$ を満たす有理的楕円曲面の構造 $f : S \longrightarrow \mathbf{P}^1$ を持つ時, *fibered–type* と呼ぶ．*fibered–type* でないとき, "*non-fibered type* " と呼ぶ.

有理的岡本・パンルベ対 $(S, Y)$ に対し $Y$ の既約分解を $Y = \sum_{i=1}^{r} m_i Y_i$ とし, $M(Y)$ を $\mathrm{Pic}(S) \simeq H^2(S, \mathbf{Z})$ の中で $\{Y_i\}_{i=1}^{r}$ で生成される部分格子とする. ただし, $\mathrm{Pic}(S)$ の双一次形式は $\mathrm{Pic}(S)$ の交差形式の $-1$ 倍を取る. すると $\{Y_i\}_{i=1}^{r}$ は $M(Y)$ のルート基底をなし，アファイン型のルート格子になる．$R(Y)$ をルート格子 $M(Y)$ のタイプとする．

$Y$ のタイプは, そのコンフィギュレーションで定まるが，$Y$ は非特異楕円曲線の場合, 楕円タイプ, また有理曲線のサイクルの場合 乗法的, それ以外のとき, 加法的 と呼ばれる ( $Y$ の一般ヤコビ多様体の群の性質による .)

技術的仮定ではあるが，$Y$ の被約成分 $Y_{red}$ が正規交差因子とする．この仮定のもとで岡本・パンルベ対の分類については次が成り立つ．

命題 **3.2.** $(S, Y)$ を有理的岡本・パンルベ対で $Y$ の被約成分 $Y_{red}$ が正規交差因子とすると $Y$ のタイプ $R(Y)$ は *Table 3* で与えられる.

次の命題は技術的であるが重要である (cf. [STT]).

命題 **3.3.** $(S, Y)$ を有理的岡本・パンルベ対とすると次の条件は同値になる．

(1) $(S, Y)$ は *non-fibered type*.

(2) $H^0(S - Y, \mathcal{O}^{alg}) \simeq \mathbf{C}$, すなわち，$S - Y_{red}$ の正則代数関数は定数しかない[1]

## 4. 岡本・パンルベ対の変型

$(S, Y)$ を有理的岡本・パンルベ対，$-K_S = Y = \sum_{i=1}^{r} m_i Y_i$ を反標準因子の既約分解とし, $D = Y_{red} = \sum_{i=1}^{r} Y_i$ と置く. いわゆる非特異対 $(S, D) = (S, Y_{red})$ の変型理論

[1] $S - Y_{red}$ は, スタイン多様体であることが予想されている.

| $Y\ or\ R(Y)$ | $\tilde{E}_8$ | $\tilde{D}_8$ | $\tilde{E}_7$ | $\tilde{D}_7$ | $\tilde{D}_6$ | $\tilde{E}_6$ | $\tilde{D}_5$ | $\tilde{D}_4$ | $\tilde{A}_{r-1}$ $1 \leq r \leq 9$ | ${\tilde{A}_0}^*$ $r=1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 小平の分類記号 | $II^*$ | $I_4^*$ | $III^*$ | $I_3^*$ | $I_2^*$ | $IV^*$ | $I_1^*$ | $I_0^*$ | $I_r$ | $I_0$ |
| パンルベ方程式 | $P_I$ | $P_{III}^{\tilde{D}_8}$ | $P_{II}$ | $P_{III}^{\tilde{D}_7}$ | $P_{III}$ | $P_{IV}$ | $P_V$ | $P_{VI}$ | $none$ | $none$ |
| $r=Y$ の既約成分の個数 | 9 | 9 | 8 | 8 | 7 | 7 | 6 | 5 | $r$ | 1 |

TABLE 3

を思い出す ( [Kaw], [SSU] [STT]). 川又による一般論 [Kaw] より $(S, D)$ の無限小変型の空間は

$$H^1(S, \Theta_S(-\log D)) \tag{14}$$

と同型であり，変型を高次に持ち上げる時の障害は

$$H^2(S, \Theta_S(-\log D)). \tag{15}$$

の中に定義される．

この有理的岡本・パンルベ対の変型を調べるための準備として, 次の命題は重要である．証明は [STT] をみよ. ([AL], [SU]).

命題 **4.1**. 有理岡本・パンルベ対 $(S, Y)$ について次が示される．

(1) $H^1(S - D, \mathbf{C}) = 0$.
(2) $H^0(S, \Omega_S^1(\log D)) = 0$.
(3) $H^2(S, \Theta_S(-\log D)) = 0$.
(4) $H^2(S, \Theta_S) = 0$.
(5) $S$ がさらに *non-fibered type* であれば，$D$ にサポートを持つ任意の有効因子 $H$ に対して $H^0(S, \Theta_S(-\log D)(H)) = 0$ ．

これらの結果から次が分かる [STT].

命題 **4.2**. $(S, Y)$ を有理的岡本・パンルベ対で $D = Y_{red}$ が正規交差因子で $r$ $(= Y$ の既約因子の個数$)$ が $2$ 以上とする ( $Y \neq \tilde{A}_0$-*type* ) . すると次が成立する.

$$c_2(S) = S \text{ の位相的オイラー数} = 12, \tag{16}$$

$$b_2(S) = \operatorname{rank} H^2(S, \mathbf{Z}) = 10, \tag{17}$$

$$\dim H^1(S, \Theta_S) = 10, \tag{18}$$

$$\dim H^1(S, \Theta_S(-\log D)) = 10 - r \tag{19}$$

また $(S, D)$ の局所変型の倉西空間は非特異で次元が $10 - r$ である.

## 5. 局所コホモロジーと時間変数

この章では $(S,Y)$ を有理的岡本・パンルベ対, $Y=\sum_{i=1}^{r} m_iY_i$, $D=Y_{red}$ とおき，次を仮定する．

(1) $(S,Y)$ は non-fibered type,
(2) $D=Y_{red}$ は正規交差因子で $r\geq 2$. この時 $Y_i$ は全て非特異有理曲線である事に注意する．

以下特に断らない限り，位相はザリスキー位相で，層も代数的連接層で考察する．次の局所コホモロジー群の完全列を考えよう．([Corollary 1.9, [Gr]])

$$H^0(S,\Theta_S(-\log D)) \to H^0(S-D,\Theta_S(-\log D)) \to H^1_D(\Theta_S(-\log D)) \to \quad (20)$$
$$H^1(S,\Theta_S(-\log D)) \stackrel{\mathrm{res}}{\to} H^1(S-D,\Theta_S(-\log D)) \quad . \quad (21)$$

$(S,Y)$ は of non-fibered type であるから, 命題 4.1 の 5 により

$$H^0(S-D,\Theta_S(-\log D))=H^0(S-D,\Theta_S)=\{0\}.$$

である．よって

命題 **5.1.** *non-fibered type* の有理的岡本・パンルベ対 $(S,Y)$ については次の完全列が得られる．

$$0\to \quad H^1_D(\Theta_S(-\log D)) \quad \to \quad H^1(S,\Theta_S(-\log D)) \quad \stackrel{\mathrm{res}}{\to} \quad H^1(S-D,\Theta_S(-\log D)) \quad (22)$$

次の定理は [T] で証明されているが，我々の理論 [STT] の鍵となる定理である.

定理 **5.1.** $(S,Y)$ を上の条件を満たす有理的岡本・パンルベ対とし $Y$ を加法的とする. すると

$$\dim H^0(D,\Theta_S(-\log D)\otimes N_D)=1. \quad (23)$$

ここで $N_D=\mathcal{O}_S(D)/\mathcal{O}_S$. 自然な単射

$$H^0(D,\Theta_S(-\log D)\otimes N_D)\hookrightarrow H^1_D(\Theta_S(-\log D)),$$

が存在するので

$$\dim H^1_D(\Theta_S(-\log D))\geq 1. \quad (24)$$

定理 5.1 における一般の有理的岡本・パンルベ対 $(S,Y)$ については

$$H^1_D(\Theta_S(-\log D))\simeq H^0(D,\Theta_S(-\log D)\otimes N_D)\simeq \mathbf{C}. \quad (25)$$

が示される．[STe1].

さて完全系列 (22) から, $H^1(S,\Theta_S(-\log D))$ の部分空間 $H^1_D(S,\Theta_S(-\log D))$ は線型写像 res の核と一致する. これから次が分かる．

$$H^1_D(S,\Theta_S(-\log D))\simeq \left\{ \begin{array}{l} (S,D) \text{ の無限小変型で} \\ S-D \text{ への制限が自明な変型を導くもの.} \end{array} \right\}.$$

さらに, 岡本・パンルベ対の半普遍ファミリーを具体的に構成する事もできる. ([Sakai], [STT], [?]).

命題 **5.2.** $R=R(Y)$ を加法的なアファインルート系で命題 *3.2* に現れるものとする. *(*この時対応する有理的岡本・パンルベ対 $(S,Y)$ については

$$\dim H^0(D,\Theta_S(-\log D)\otimes N_D)=1$$

上の定理 5.1 からなり立つ事に注意する.) $\mathcal{M}_R$ を $\mathbf{C}^s = \operatorname{Spec}\mathbf{C}[\alpha_1, \cdots, \alpha_s]$ の次元 $s = 9 - r$ のアファイン開集合, $\mathcal{B}_R$ を $\mathbf{C} = \operatorname{Spec}\mathbf{C}[t]$ のアファイン開集合が存在し, また次の可換図式で下記の条件を満たすものが存在する.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \hookleftarrow & \mathcal{D} \\ \pi\downarrow & \swarrow & \varphi \\ \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R & & . \end{array} \tag{26}$$

(1) 上の図式は非特異対 $(S, D)$ の変型である.
(2) 相対有理 2 形式
$$\omega_{\mathcal{S}} \in \Gamma(\mathcal{S}, \Omega^2_{\mathcal{S}/\mathcal{M}_R\times\mathcal{B}_R}(\mathcal{Y}))$$
が存在しその極因子は $\mathcal{Y}$ で与えられ $\mathcal{Y}_{red} = \mathcal{D}$.
(3) 全ての点 $(\boldsymbol{\alpha}, t) \in \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ に対し, $(\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \mathcal{Y}_{\boldsymbol{\alpha},t})$ はタイプ $R = R(Y)$ の有理的岡本・パンルベ対である.
(4) 上のファミリーは一般の点 $(\boldsymbol{\alpha}, t) \in \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ で半普遍的, すなわち小平・スペンサー写像
$$\rho : T_{\boldsymbol{\alpha},t}(\mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R) \longrightarrow H^1(\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(-\log \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t})) \tag{27}$$
は $(\boldsymbol{\alpha}, t)$ で同型である.
さらに $t$ 方向の小平・スペンサー類 $\rho(\frac{\partial}{\partial t})$ は
$$\delta : \mathbf{C} \simeq H^0(\mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(-\log \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t}) \otimes N_{\mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t}}) \hookrightarrow H^1(\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(-\log \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t})). \tag{28}$$
の像に入っている.
(5) $M_R$ と $B_R$ を $\mathcal{M}_R$ と $\mathcal{B}_R$の座標環とする ( $\mathcal{M}_R = \operatorname{Spec} M_R$, $\mathcal{B}_R = \operatorname{Spec} B_R$ ). $\mathcal{S}$ の有限アファイン被覆 $\{\tilde{U}_i\}_{i=1}^{l+k}$ で各 $i$ に対し
$$\tilde{U}_i \ \simeq\ \operatorname{Spec}(M_R \otimes B_R)[x_i, y_i, \frac{1}{f_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t)}] \subset \operatorname{Spec}\mathbf{C}[\boldsymbol{\alpha}, t, x_i, y_i] \simeq \mathbf{C}^{s+3} \tag{29}$$
となるものが取れる. ここで $f_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t) \in (M_R \otimes B_R)[x_i, y_i]$ である. さらに $\mathcal{S} - \mathcal{D}$ は $\{\tilde{U}_i\}_{i=1}^{l}$ で被覆されると仮定できる. さらに相対有理 2 形式は $\omega_{\mathcal{S}}$ 各開被覆上で
$$\omega_{\mathcal{S}|\tilde{U}_i} = \frac{dx_i \wedge dy_i}{f_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t)^{m_i}} \tag{30}$$
と書ける.
(6) 各添え字 $i, j$ で $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \emptyset$ なるものについて座標変換
$$x_i = f_{ij}(x_j, y_j, \boldsymbol{\alpha}, t), \quad y_i = g_{ij}(x_j, y_j, \boldsymbol{\alpha}, t) \tag{31}$$
は $x_j, y_j, \boldsymbol{\alpha}, t$ の有理関数で書かれる.

## 6. 大域的変型からハミルトン系へ

さて, 前章で構成した岡本・パンルベ対の大域的な族からどのように微分方程式が得られ , そして何故それがハミルトン系になるかを説明しよう.
まず $R(Y)$ が加法的であるから
$$\delta : \mathbf{C} \simeq H^0(D, \Theta_S(-\log D) \otimes N_D) \hookrightarrow H^1(S, \Theta_S(-\log D)).$$

なる $1$ 次元部分空間が存在する. この $1$ 次元部分空間は前章の族 $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ に対しては, $\mathcal{B}_R$ 方向に対応する. $\mathcal{B}_R$ 方向の微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ の持ち上げとして $\mathcal{S}$ 上の大域的有理ベクトル場 $\tilde{v}$ でその極が $\mathcal{D}$ のみにあるものが構成できる事が示される. この 大域的有理ベクトル場 $\tilde{v}$ の $\mathcal{S} - \mathcal{D}$ への制限が, 求める代数的ベクトル場である. さらにこのベクトル場は一意的であることも示される. このベクトル場に対応する一階の微分方程式系が求めるパンルベ方程式のハミルトン系である事が示せる.

その原理は簡単で次の様に説明される .

前章の $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \emptyset$ に対する座標変換 $(31)$ から小平・スペンサー類 $\rho(\frac{\partial}{\partial t})$ はČech $1$-コサイクル

$$\rho(\frac{\partial}{\partial t}) = \{\ \theta_{ij} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y_i} \in \Gamma(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j, \Theta_{\mathcal{S}/\mathcal{M}_R\times\mathcal{B}_R}(-\log \mathcal{D}))\ \} \tag{32}$$

で表現される.

今, 族 $(26)$ のファイバー $(\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \mathcal{Y}_{\boldsymbol{\alpha},t})$ は *non-fibered type* であると仮定してよい.

命題 $5.2$ の $(28)$ により $\rho(\frac{\partial}{\partial t})$ は $\delta$ の像に入っているとして良い.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} \simeq H^0(D, \Theta_{\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(-\log \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t}) \otimes N_D) & \underset{\delta \searrow}{\subset} & H^1_{\mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(-\log \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t})). \\ & & \downarrow \\ & & H^1(\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(-\log \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t})) \end{array} \tag{33}$$

局所コホモロジー群は自然な制限写像

$$\mathrm{res} : H^1(\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(-\log \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t})) \longrightarrow H^1(\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t} - \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(-\log \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t})), \tag{34}$$

の核であるから $(\mathrm{cf.}$ 命題 $5.1)$ 小平・スペンサー類 $\rho(\frac{\partial}{\partial t})$ は

$$H^1(\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t} - \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(-\log \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t}))$$

で $0$ である. さらに詳しく $1$-コサイクル $\rho(\frac{\partial}{\partial t})$ は

$$H^1(\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(-\log \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t}) \otimes \mathcal{O}_S(\mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t})). \tag{35}$$

の中でゼロである事がわかる .

これらのコホモロジーの次元が一定であるから, 基底変換定理を用いれば各 $1 \leq i \leq l + k$ について有理的ベクトル場

$$\theta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t) = \eta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \zeta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t)\frac{\partial}{\partial y_i} \ \in\ \Gamma(\tilde{U}_i, \Theta_{\tilde{U}_i}(-\log \mathcal{D}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{D})) \tag{36}$$

が存在して

$$\theta_{ij}(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t) = \theta_j(x_j, y_j, \boldsymbol{\alpha}, t) - \theta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t). \tag{37}$$

とできることが分かる. ( $1 \leq i \leq l$ なる $i$ については $\tilde{U}_i \cap \mathcal{D} = \emptyset$ であるから $\theta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t)$ は正則代数的なベクトル場である事が分かる. )

さて $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$ 上で

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i + \theta_{ij}(\boldsymbol{\alpha}, t), \tag{38}$$

であるから

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i + (\theta_j(x_j, y_j, \boldsymbol{\alpha}, t) - \theta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t)), \tag{39}$$

すなわち

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j - \theta_j(x_j, y_j, \boldsymbol{\alpha}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i - \theta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t). \tag{40}$$

よってベクトル場

$$\{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i - \theta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t)\}_{1 \leq i \leq l+k} \tag{41}$$

は張り合って, $\mathcal{S}$ 上定義された $\mathcal{D}$ のみに極を有す大域的な有理ベクトル場

$$\tilde{v} \in \Gamma(\mathcal{S}, \Theta_{\mathcal{S}}(-\log \mathcal{D}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{D}))$$

を与える. このベクトル場 $\tilde{v}$ は写像 $\pi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ での $\frac{\partial}{\partial t}$ の持ち上げである. 以上より, 次の定理を得る (cf. [STT]).

**定理 6.1.** $R = R(Y)$, $\mathcal{S}, \mathcal{D}, \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ を上の通りとする. すると, $\mathcal{S}$ 上の有理ベクトル場

$$\tilde{v} \in \Gamma(\mathcal{S}, \Theta_{\mathcal{S}}(-\log \mathcal{D}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\mathcal{D})) \tag{42}$$

であって $\frac{\partial}{\partial t}$ の持ち上げ ( すなわち, $\pi_*(\tilde{v}) = \frac{\partial}{\partial t}$) であるものが一意的に存在する.

上のベクトル場の $\mathcal{S} - \mathcal{D}$ への $\tilde{v}_{\mathcal{S}-\mathcal{D}}$ は正則なベクトル場で $1 \leq i \leq l$ の時, 各開集合 $\tilde{U}_i$ 上で

$$\tilde{v}_{|\tilde{U}_i} = \frac{\partial}{\partial t} - \theta_i = \frac{\partial}{\partial t} - \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \zeta_i \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{43}$$

の様に表されるが, これは次の微分方程式系と同値である.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = -\eta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t) \\ \dfrac{dy_i}{dt} = -\zeta_i(x_i, y_i.\boldsymbol{\alpha}, t) \end{cases}. \tag{44}$$

ここで $\eta_i, \zeta_i$ は $\tilde{U}_i$ 上の代数関数である.

さらに,(9) の様にハミルトン系に書ける事に幾何学的に明瞭な証明を与えられる. (ただし, 上記に与えた各アファイン座標ではハミルトン系でかけない場合が起こる. ($\tilde{E}_8, \tilde{D}_7, \tilde{D}_8$ の場合に起こる). これは古典的には知られていなかった事であるが, $S - D$ が必ずしも $\mathbf{C}^2$ で被覆できない場合があり, その時に相対 2 形式が (30) のように分母に関数がかかる. この関数が $t$ に依存する場合はハミルトン系にかけない. )

我々は ベクトル場 $\tilde{v}$ が, (30) で与えられる相対有理 2 形式 $\omega_{\mathcal{S}}$ を保つ事を示す事ができる. これは次の様に述べられる ( [STT]).

$$\boxed{d_{\mathcal{S}/\mathcal{M}}(\tilde{v}\cdot(\omega_{\mathcal{S}}\wedge dt))=0,} \tag{45}$$

ここで $d_{\mathcal{S}/\mathcal{M}}$ は相対微分, また $\tilde{v}\cdot(\omega_{\mathcal{S}}\wedge dt)$ は相対 $3$ 形式とベクトル場の縮約をあらわす.

アファイン開集合 $U\times M_R\times B_R$ で $U\simeq \mathbf{C}^2$ で座標 $(x,y)$ が $\omega_{\mathcal{S}|\mathbf{C}^2}=dx\wedge dy$ を満たすように取れれば上の方程式 $(45)$ は, 微分方程式系がハミルトン系であることを意味する.

上の方針にそって具体的族の構成から, ハミルトン系の具体的な構成をする事もできる. (cf. [STT], [STe2]).

## 7. 岡本・パンルベ対の条件の意味とその高次元化

岡本・パンルベ対 $(S,Y)$ の条件 $(13)$

$$\boxed{-K_S\cdot Y_i=Y\cdot Y_i=\deg Y_{|Y_i}=0.}$$

は簡単ではあるが, パンルベ方程式を特徴づけてしまう強力なものであった. [2] しかしこの条件が一体何を意味するのかは最近まで分かっていなかった.

条件 $(13)$ は, 位相的な条件であるが, 反標準因子 $Y$ が小平特異ファイバーと同じコンフィギュレーションを持つ事まで意味してしまう. その事から, $S$ が有理的な場合は $\mathbf{P}^2$ の $9$ 点 blow-up である事まで帰結されて完全な分類や変型とパンルベ方程式の対応というシナリオが完成してしまうのであった.

この条件の内在的意味を明らかにし, それと同時に高次元を含めた, パンルベ性をもった常微分方程式系 ( もしくはさらに難しく偏微分方程式系 ) の分類問題, そしてパンルベ性と可積分性の関係を深く考察したいというのは自然な問題意識であろう. モノドロミー保存変型のつながりで考察するのが現在まで一番標準的なやり方であるが, 我々は, 初期値空間の幾何学, 特に

<u>初期値空間をコンパクト化するときに付け加える因子の性質が重要である</u>

と考える.

パンルベ性を持つ高階の常微分方程式系の族として野海・山田が導入した $\tilde{A}_l=A_l^{(1)}$ 型の対称性を持つものが最近発見されている ([NY2]). パンルベ $IV$ 型が $\tilde{A}_2=A_2^{(1)}$ の対称性を持っているが, その一般化になっておりハミルトン系に書けるものである。(彼らはさらに, 一般のアファインワイル群のクレモナ群としての標準的実現を与え, 対称性を持つ差分方程式系の標準的な構成を与えた. (cf. [NY1])).

簡単の為に $\tilde{A_{2n}}=A_{2n}^{(1)}$ に対応する場合に話を限ると初期値空間は $\mathbf{C}^{2n}$ を適当に拡張したものであるべきであり $\mathbf{P}^{2n}$ の無限遠超平面 $H=\mathbf{P}^{2n}-\mathbf{C}^{2n}$ の点に適当な双有理変換を施したものである. ($n\geq 2$ の場合はまだ, 良いモデルを決められていない. )

さて, パンルベ性をもつ常微分方程式系で, ハミルトニアン系に書けるものをまず考えよう. $\mathbf{C}^{2n}$ のあるアファイン開集合 $U$ の座標 $(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{C}^{2n}$ を用いてシンプレクテック形式が

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}dx_i\wedge dy_i$$

[2] 坂井の研究 [Sakai] により離散パンルベの場合も含めて条件 $(13)$ が重要であることが分かっている.

と書ける時, それに対するハミルトニアン系は

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx_i}{dt} & = & \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dt} & = & -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{array} \right. \qquad 1 \leq i \leq n \tag{46}$$

で与えられる. $H = H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ が $\mathbf{x}, \mathbf{y}, t$ の多項式とするとこの微分方程式系は $U \times \mathbf{C} \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ 上の代数的ベクトル場

$$\tilde{v} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{47}$$

と同値である.

さて次の大域的な設定を考えよう. $\mathcal{B}$ を $\mathbf{C}$ のアファイン開集合とする. 今, $2n$ 次元の非特異射影多様体 $\mathcal{X}_t$ とその上の単純正規交叉因子 $\mathcal{D}_t$ の非特異対 $(\mathcal{X}_t, \mathcal{D}_t)$ の $\mathcal{B}$ 上の変型

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \hookleftarrow & \mathcal{D} \\ \pi \downarrow & \swarrow & \varphi \\ \mathcal{B} & & . \end{array} \tag{48}$$

が与えられていて次の条件を満たすとする.

(1) 相対有理 $2$ 形式

$$\omega_{\mathcal{X}} \in \Gamma(\mathcal{X}, \Omega^2_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}(\mathcal{Y}))$$

が存在しその極因子は $\mathcal{Y}$ で与えられ $\mathcal{Y}_{red} = \mathcal{D}$. また $\mathcal{X} - \mathcal{D}$ 上では各ファイバーで $\omega_{\mathcal{X}}$ は非退化 $2$ 形式である. (この意味で, 対数的シンプレクテック多様体の変型であるとみなせる.)

(2) $\mathcal{X}$ 上の有理ベクトル場

$$\tilde{v} \in \Gamma(\mathcal{X}, \Theta_{\mathcal{X}}(-\log \mathcal{D}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{D})) \tag{49}$$

で, $\frac{\partial}{\partial t}$ の $\pi$ による持ち上げ ( $\Leftrightarrow \pi_*(\tilde{v}) = \frac{\partial}{\partial t}$) であるものが存在する. ( $\tilde{v}$ は $\mathcal{X} - \mathcal{D}$ 上に代数的ベクトル場を定める.)

(3) 次が成立する.

$$d(\tilde{v} \cdot (\omega_{\omega_{\mathcal{X}}} \wedge dt)) = 0. \tag{50}$$

(この事から, $\tilde{v}$ は (少なくとも解析的に局所的には) ハミルトニアン系と同値になる.)

$\pi$ の相対次元が $2$ の時に次がいえる.

**命題 7.1.** 上の変型族 *(48)* が *2* 次元代数曲面の族であるとすると, 次の命題は同値になる.

(1) *(49)* の有理ベクトル場 $\tilde{v}$ は *accessible* 特異点を持たない.

(2) 各ファイバー $\mathcal{X}_t$ に対し, $(X, Y) = (\mathcal{X}_t, \mathcal{Y}_t)$, $\mathcal{Y}_t \in |-K_{\mathcal{X}_t}|$ とすると, 岡本・パンルベ対の条件 *(13)* を満たす.

この命題から, 岡本・パンルベ対の条件は, 上の様な有理ベクトル場が accessible 特異点を持たない為の条件である事が分かる. 証明は略する.

ファイバーが高次元のときでも, 次がいえる. $\mathcal{D}$ を既約分解する.

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{D}_i$$

簡単のために各 $t$ に対して $\mathcal{D}_t$ の既約分解も $\sum_{i=1}^r \mathcal{D}_{i,t}$ で与えられるとする.

命題 **7.2**. 上の状況で次の事が成り立つ. $t \in \mathcal{B}$ に対して, 集合を

$$Acc(\tilde{v}, \mathcal{D}_{i,t}) := \{\tilde{v} \text{ の } \mathcal{D}_{i,t} \text{ に置ける } accessible \text{ 特異点 }\} \tag{51}$$

と定める. すると, ある切断 $N_{\mathcal{D}_{i,t}/\mathcal{X}_t}$ を $\mathcal{D}_{i,t}$ の法束とすると

$$s \in H^0(\mathcal{D}_{i,t}, \Theta_{\mathcal{D}_{i,t}} \otimes N_{\mathcal{D}_{i,t}/\mathcal{X}_t})$$

が存在して

$$Acc(\tilde{v}, \mathcal{D}_{i,t}) \subset \{s \text{ のゼロ点 }\}.$$

特に, ベクトル束 $\Theta_{\mathcal{D}_{i,t}} \otimes N_{\mathcal{D}_{i,t}/\mathcal{X}_t}$ のトップチャーン類が消えていれば, すなわち

$$\boxed{c_{2n-1}(\Theta_{\mathcal{D}_{i,t}} \otimes N_{\mathcal{D}_{i,t}/\mathcal{X}_t}) = 0} \tag{52}$$

であれば $\tilde{v}$ は $\mathcal{D}_{i,t}$ において $accessible$ 特異点を持たない.

注意 **7.1**. 上の *(52)* の条件が, *2*次元の場合, 岡本・パンルベ対の条件 *(13)* と同値である事を見ておこう. 岡本・パンルベ対の族の一つのファイバーを $(S, Y)$, $Y = \sum_{i=1}^r m_i Y_i$ とおくと *(52)* の条件は

$$c_1(\Theta_{Y_i}(N_{Y_i/S})) = 0$$

である. 今 $Y_i$ が曲線であるから, $\Theta_{Y_i} = -K_{Y_i}$, また $N_{Y_i/S} = Y_{i,|Y_i}$ であるが, 添加公式から $(K_S + Y_i)_{|Y_i} = K_{Y_i}$ である. よって

$$-K_{Y_i} + N_{Y_i/S} = (-K_S - Y_i + Y_i)_{|Y_i} = (-K_S)_{|Y_i}$$

であるから, $c_1(\Theta_{Y_i}(N_{Y_i/S})) = 0$ は条件

$$\deg(-K_S)_{|Y_i} = -K_S \cdot Y_i = 0$$

と同値になる.

注意 **7.2**. 野海・山田の $\tilde{A}_4$ の対称性を持つ高階のパンルベ方程式系の初期値空間は $\mathbf{P}^4$ の境界 $H = \mathbf{P}^3$ で適当に $blow\text{-}up$ したものである. この時, $blow\text{-}up$ する前の $\mathbf{P}^4 \times \mathbf{P}^1$ 上の有理ベクトル場 $\tilde{v}$ で境界 $H \times \mathbf{P}^1$ で一位の極をもつものが存在する. この時, $\tilde{v}$ は $accesible$ 特異点を持つ事が分かる. 一方

$$c_3(\Theta_{\mathbf{P}^3}(N_{H/\mathbf{P}^3})) = 15 \ points$$

である事が分かる. よって, *15* 点の $blow\text{-}up$ が必要になるが, 田原伸彦の計算 [Tahara] と整合している. しかし, この場合, *15* 点の内の *5* 点は $blow\text{-}up$ だけで $accessible$ 特異点の解消はできるが, その他の点では $blow\text{-}up$ した後で, $blow\text{-}down$ する必要がある. この意味で, 良い初期値空間を作る事は, 極小モデルを作る操作と言えそうである. 当然の事ながら *4* 次元以上の極小モデルの理論は非常に難しい事が予想される. しかしこれらの例の計算から興味深い計算が出てくる事を期待している.

## References


[AL] D. Arinkin and S. Lysenko, *Isomorphisms between moduli spaces of $SL(2)$-bundles with connections on $\mathbf{P}^1\backslash\{x_1, \cdots .x_4\}$*, Math. Res. Letters **4**, (1997), 181–190.

[Bo] P. Boalch, *Sumplectic Manifolds and isomonodormic deformations*, to appear in Adv. in Math.

[B-W] D. M. Burns, Jr. & J. M. Wahl, *Local contributions to global deformations of surfaces*, Invent. Math. **26** (1974), 67-88.

[D] P. Deligne, Theórie de Hodge, II, Publ. Math. IHES, **40**, (1971), 5–57.

[Du] B. Dubrovin, *Geometry of 2D Topological Fields Theories*, Lecture Notes in Math., Springer, **1620**, 120–348.

[Gr] A. Grothendieck, *Local cohomology*, (noted by R. Hartshorne), Lecture Notes in Math. 41, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1967), 106 pp.

[I] K. Iwasaki, *Moduli and deformation for Fuchsian projective connections on Riemann surface*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 38, (1991), 431–531.

[IKSY] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé, Vieweg, 1991.

[J] 神保道夫, ホロノミック量子場，岩波講座　現代数学の展開.

[JMU] M. Jimbo , T. Miwa and K. Ueno, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I. General theory and $\tau$-function*, Phys. D **2**, no. 2, (1981), 306–352.

[JM1] M. Jimbo and T. Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II*, Phys. D **2** (1981), no. 3, 407–448.

[JM2] M. Jimbo and T. Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. III*, Phys. D **4** (1981/82), no. 1, 26–46.

[Kaw] Y. Kawamata, *On deformations of compactifiable manifolds*, Math. Ann., **235**, (1978), 247–265.

[Ki] H. Kimura, Hironobu, *Uniform foliation associated with the Hamiltonian system $H_n$*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 20 (1993), no. 1, 1–60.

[Kod] K. Kodaira, *On compact analytic surfaces*, II, Annals of Math., **77**, (1963), pp. 563–626.

[KodT] K. Kodaira, Complex manifolds and deformations of complex structures, Springer–Verlag, 1985.

[KS] K. Kodaira and D.C. Spencer, *On deformations of complex analytic structures, I, II*, Ann. of Math., **67**, (1958), pp. 328–466.

[NY1] M. Noumi and Y. Yamada, *Affine Weyl Groups, Discrete Dynamical Systems and Painlevè Equations*, Comm Math Phys **199**, (1998), 2, pp281-295

[NY2] M. Noumi and Y. Yamada, *Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$* , Funckcial. Ekvac., **41** (1998), 483–503.

[MMT] T. Matano, A. Matumiya and K. Takano, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems, II*, J. Math. Soc. Japan, **51**, No.4, 1999, 843–866.

[Mal] J. Malmquist, *Sur les équations différentielles du secondordre dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes*, Arkiv. Mat. Astr. Fys., 17 (1922-23), 1-89.

[Ma1] Y. I. Manin, Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology and Moduli spaces. American Mathematical Society, Colloquium Publication, **Vol. 47**, AMS. 1999.

[N] 野海正俊, パンルヴェ方程式–対称性からの入門, 朝倉書店, (2000).

[NTY] M. Noumi, K. Takano and Y. Yamada, *Bäcklund Transformations and the Manifolds of Painlevé Systems*.

[OkaT] 岡本和夫, パンルヴェ方程式序説, 上智大学数学講究録 No.19 (1985)

[O1] K. Okamoto, *Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, Espaces des conditions initiales*, Japan. J. Math., **5**, 1979, 1–79.

[O2] K. Okamoto, *Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations*, I, II, Proc. Japan Acad., **56**, (1980), 264–268; ibid, 367–371.

[03] K. Okamoto, *Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier systems*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math., 33, (1986), 575–618.

[O4] K. Okamoto, *Studies on the Painlevé equations I.* Annali di Mathematica pura ed applicata **CXLVI** 1987, 337–381; II. Japan. J. Math., **13**, (1987), 47–76; III. Math. Ann. **275** (1986), 221–255; IV. Funkcial. Ekvac. Ser. Int. **30** (1987), 305–332.

[SSU] M.-H. Saito, Y. Shimizu and S. Usui, *Variation of Hodge Structure and the Torelli Problem*, Advanced Studies in Pure Math. **10**, 1987, 649–693.

[STa] M.-H. Saito and T. Takebe, *Classification of Okamoto–Painlevé pairs*. preprint, Kobe 2000. math.AG 0006028

[STT] M.-H. Saito, H. Terajima and T. Takebe, *Deformation of Okamoto–Painlevé pairs and Painlevé equations*. to appear in Jour. of Algebraic Geometry, math.AG 0006028 .

[STe1] M.-H. Saito and H. Terajima, *Nodal curves and Riccati solutions of Painlevé equations*, preprint.

[STe2] M.-H. Saito and H. Terajima, *Semiuniversal families of generalized Okamoto–Painlevé pairs and explicit descriptions of Painlevé equations*. in preparation.

[SU] M.-H. Saito and H. Umemura, *Painlevé equations and deformations of rational surfaces with rational double points*. Proceedings of the Nagoya 1999 International Workshop, Physics and Combinatorics, 1999, edited by A. Kirillov, A. Tsuchiya and H. Umemura, 320–365.

[Sakai] H. Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Commun. Math. Phys. **220**, 165–229 (2001).

[ShT] T. Shioda and K. Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I, Funkcial. Ekvac., **40**, 1997, 271–291.

[Tahara] 田原伸彦, $A_4^{(1)}$ 型方程式の初期値空間について, パンルベ方程式の眺望, 高野恭一, 野海正俊編, Rokko Lecture in Math., **7**, (2000), 121–130.

[T] Hitomi Terajima, *Local cohomology of generalized Okamoto–Painlevé pairs and Painlevé equations*. Preprints, Kobe, May, 2000, math.AG 0006027.

[U] 梅村浩, *Painlevé* 方程式の *100* 年, 数学, **51**, (1999), 395-420.

神戸市灘区六甲台 1-1 , 657-8501, 神戸大学理学部数学教室
*E-mail address*: mhsaito@math.kobe-u.ac.jp