対数的シンプレクテック多様体の変形とパンルベ型方程式

齋藤 政彦

(神戸大学理学部)

2002年 関数方程式分科会 特別講演

明治大学 2002年3月28日 16:30–17:30

学術委員会からのお願い

2004年度の第13回日本数学会国際研究集会(MSJ-IRI)のテーマ を募集中です. 奮ってご応募ください.
（応募用紙等は数学通信参照の事.）

2002年度の第11回日本数学会国際研究集会(MSJ-IRI)は,

大規模相互作用系に関する確率解析

July 17-19, 2002 (Workshop), July 22-26 (Symposium)

Shonan Village Center, Hayama, Japan

です. （組織委員長:舟木 直久)
ポスター, ホームページ有り.

この仕事に関係する論文：

- **齋藤・ 梅村:**
  M.-H. Saito and H. Umemura, *Painlevé equations and deformations of rational surfaces with rational double points.* Proceedings of the Nagoya 1999 International Workshop, Physics and Combinatorics, 1999, edited by A. Kirillov, A. Tsuchiya and H. Umemura, 320–365.
- **齋藤 ・ 竹部:**
  M.-H. Saito and T. Takebe, *Classification of Okamoto–Painlevé pairs.* preprint, Kobe 2000. math.AG 0006028
- **齋藤 ・竹部・寺島:**
  M.-H. Saito, H. Terajima and T. Takebe, *Deformation of Okamoto–Painlevé pairs and Painlevé equations.* J. Algebraic Geom. 11 (2002), 311-362. math.AG/0006026.
- **齋藤・寺島:**
  M.-H. Saito and H. Terajima, *Nodal curves and Riccati solutions of Painlevé equations*, preprint 2002, Kobe, math.AG/0201225, 30 pages.
- **齋藤・寺島:**
  M.-H. Saito and H. Terajima, *Semiuniversal families of generalized Okamoto–Painlevé pairs and explicit descriptions of Painlevé equations.* in preparation.

パンルベ方程式とは何か？

代数的常微分方程式

$$\boxed{F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \cdots, \frac{d^nx}{dt^n}) = 0} \tag{1}$$

を考える. ただし,

$$F(t, x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{C}(t)[x_0, \cdots, x_n].$$

初期値 $(t_0, c_0, \cdots, c_n) \in \{F = 0\}$ をとる時，初期値問題

$$\frac{d^i\varphi}{dt^i}(t_0) = c_i \tag{2}$$

の解およびその解析接続 $\varphi(t, \mathbf{c})$ を考えよう.

もし(1)が，線形方程式ならば，その解の特異点は全て方程式から定める事ができる．

しかし，(1)が非線形方程式ならば，初期値に依存する特異点（= 分岐点，極，真性特異点）を持つ可能性がある．これを，

$\boxed{\textbf{動く特異点}}$

と呼ぶ．

定義 0.1.

方程式(1) が，**パンルベ性**をもつ．

$$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$$

(1)の解の**動く特異点が極のみ**

方程式(1)がパンルベ性をもつ時に，

パンルベ型の方程式

という．

例

次の簡単な方程式を考えよう.

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = x^k, \quad (k \geq 0).} \tag{3}$$

$k \neq 1$ ならば,

$$\int x^{-k} dx = \int dt, \quad \frac{1}{1-k} x^{1-k} = t + c$$

よって，解およびその特異点は次の表で与えられる.

k	$x(t)$	特異点
0	$t+c$	正則
1	$\exp(t+c)$	正則
2	$\frac{1}{-(t+c)}$	動く特異点は極
≥ 3	$\frac{1}{\sqrt[k-1]{(1-k)(t+c)}}$	t= -cで動く分岐点

よって,

(3)が，パンルベ性をもつ

$$\iff$$

$$0 \leq k \leq 2.$$

定理 0.1. (L. Fuchs, H. Poincaré).
パンルベ性を持つ代数的微分方程式(1)は, $n=1$, すなわち一階の時, 時間変数tの正則変換と, xの一次分数変換で, 次の方程式に帰着する.

1. Weierstrass $\wp$ 関数の満たす微分方程式

$$\boxed{(x')^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3} \tag{4}$$

2. Riccati 方程式

$$\boxed{x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t).} \tag{5}$$

ここで, $g_2, g_3 \in \mathbf{C}$, $a(t), b(t), c(t)$は, tの有理関数とする. また, $'$は$\frac{d}{dt}$を表す.

定義 0.2. **<u>パンルベ方程式</u>** とは 2階の代数的常微分方程式で

$$x'' = R(x, x', t), \quad R(x, y, t) \in \mathbf{C}(x, y, t) \tag{6}$$

の形の方程式でパンルベ性を持つもの事である.

パンルベ(P. Painlevé (1863–1933))
+ B.O. Gambier

パンルベ方程式が適当な変換により, 求積法で解かれるか 線型方程式に帰着するか, もしくは6つのタイプの方程式 P_J,
$J = I, II, III, IV, V, VI$
に帰着する事を示した.

現在では，**8つのタイプ**に分類するのが正しいと思われている.
（坂井，齋藤–竹部–寺島）.

8種類のパンルベ方程式

$$
\begin{aligned}
P_I: \quad \frac{d^2x}{dt^2} &= 6x^2 + t, \\
P_{II}: \quad \frac{d^2x}{dt^2} &= 2x^3 + tx + \alpha, \\
P_{III}^{\tilde{D}_6}: \quad \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}(\alpha x^2 + \beta) + \gamma x^3 + \frac{\delta}{x}, \\
P_{III}^{\tilde{D}_7}: \quad \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{x} + \frac{2x^2}{t^2} + \frac{\alpha - 2}{t}. \\
P_{III}^{\tilde{D}_8}: \quad \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{dx}{dt} + \frac{2x^2}{t^2} - \frac{2}{t}. \\
P_{IV}: \quad \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{2x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{3}{2}x^3 + 4tx^2 + 2(t^2 - \alpha)x + \frac{\beta}{x}, \\
P_V: \quad \frac{d^2x}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{dx}{dt} + \frac{(x-1)^2}{t^2}\left(\alpha x + \frac{\beta}{x}\right) \\
&\qquad + \gamma\frac{x}{t} + \delta\frac{x(x+1)}{x-1}, \\
P_{VI}: \quad \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \\
&\quad \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{x-t}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{x(x-1)(x-t)}{t^2(t-1)^2} \\
&\quad \times \left[\alpha - \beta\frac{t}{x^2} + \gamma\frac{t-1}{(x-1)^2} + \left(\frac{1}{2} - \delta\right)\frac{t(t-1)}{(x-t)^2}\right].
\end{aligned}
$$

TABLE 1. 8 types of Painlevé equations

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 等はは複素パラメーターである.

ハミルトン系と岡本初期値空間

これらのうち, $P_{III}^{\tilde{D}_8}$ 以外は，ハミルトン系

$$(H_J):\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial H_J}{\partial y},\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{\partial H_J}{\partial x},\end{cases}\tag{7}$$

と同値になることが知られている．但し,

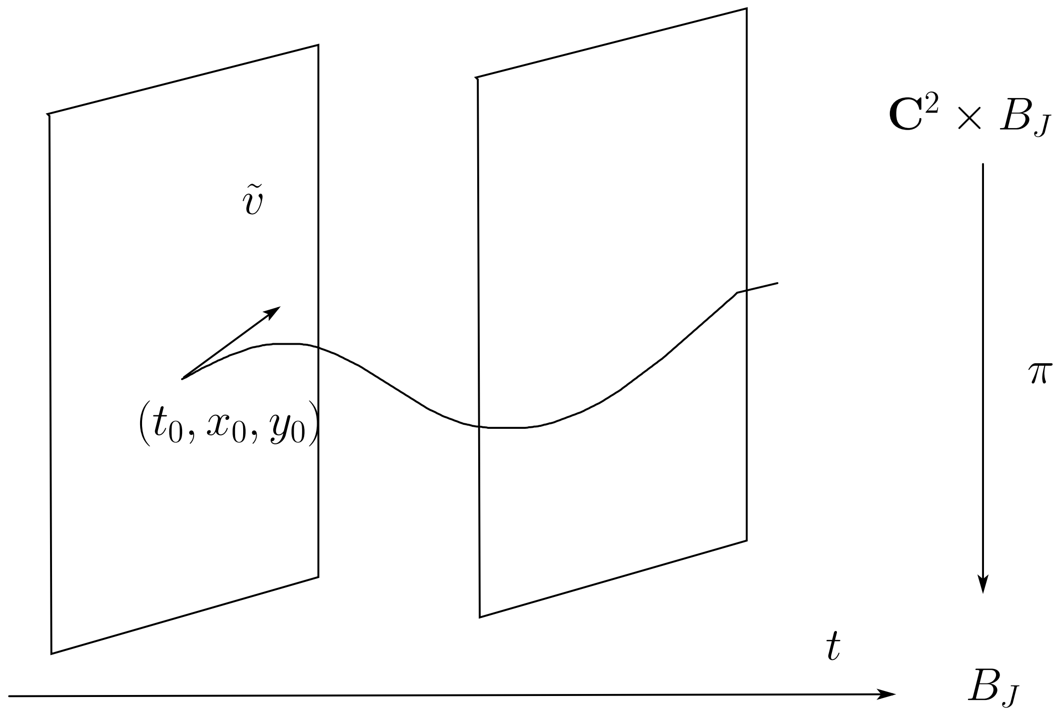
$$H_J=H_J(x,y,t)\in\mathbf{C}(t)[x,y].$$

(cf. [**?**], [O1], [IKSY], [MMT], [STe2])

$\Sigma_J=\{a_1,\cdots,a_l\}\subset\mathbf{C}$ を (H_J) の動かない特異点（方程式系の特異点）とし,

$$B_J=\mathbf{C}-\Sigma_J$$

と置く.



$$\begin{array}{c} \mathbf{C}^2 \times B_J \\ \pi \downarrow \\ B_J \end{array}$$

ハミルトン系(H_J)は, $\mathbf{C}^2 \times B_J$の次の正則ベクトル場

$$\boxed{\tilde{v} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H_J}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H_J}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}} \qquad (8)$$

を与える事と同値である.

π の相対コンパクト化を考える.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^2 \times B_J & \hookrightarrow & \mathbf{P}^2 \times B_J \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ B_J & = & B_J \end{array} \qquad (9)$$

さらに，コンパクト化に際して付け加える無限遠直線を

$$\mathbf{P}^2 - \mathbf{C}^2 = L \simeq \mathbf{P}^1$$

と置く.

正則ベクトル場 $\tilde{v}$ は，$\mathbf{P}^2 \times B_J$ の

$$\boxed{\text{有理的なベクトル場 } \tilde{v}}$$

に拡張される.

- 有理ベクトル場 $\tilde{v}$ は，境界の超曲面

$$L \times B_J = \left(\mathbf{P}^2 - \mathbf{C}^2\right) \times B_J$$

で極を有する. (いたる所正則ならば，Riccati方程式の様に線型方程式に帰着する.)
- 有理ベクトル場 $\tilde{v}$ は，$\mathbf{P}^2 \times B_J$ に特異点をもつ葉層構造を定める.
- 有理ベクトル場 $\tilde{v}$ は, $\mathbf{C}^2 \times B_J$ ではt-方向の成分が消えないベクトル場である.
- 境界$L \times B_J$の一般の点では, 上記のベクトル場を適当に正規化するとゼロベクトル場ではないが，t方向の成分が0になる. よって，解曲線はあるファイバー$L \times \{t_0\}$に入る.
- 境界$L \times B_J$の特別な点では，適当に正規化ベクトル場の係数が全て0になる. このとき内点$\mathbf{C}^2 \times B_J$から来て，その点を通りそして内点に戻っていく解曲線が，多数ある可能性がある. そのような特異点を**到達可能特異点(accesible singularity)**と呼ぶ（木村弘信氏の論文).

例： (x,y,t), $L\times B_J=\{x=0\}$の時,

$$\tilde{v}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}$$

の到達可能特異点は，$(0,0,t)$である.

$$x\tilde{v}=x\cdot\frac{\partial}{\partial t}+x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial}{\partial y}$$

ここで，$\tilde{v}$の解曲線として

$$t=t, x(t)=(t-c), y(t)=A\cdot(t-c)$$

が取れるが，$(x,y,t)=(0,0,c)$で解曲線は$L\times B_J$とまじわる.

$x=0, y\neq 0$の時には，点は内点から到達不可能である.

岡本の特異点解消

岡本和夫氏は，P_J, $(J=I,\cdots,VI)$のパンルベ方程式について，それと同値なハミルトン系H_Jを$\mathbf{P}^2\times B_J$で考え，その到達可能特異点をブローアップで解消した．（本当は少し違うファミリーから出発する.）

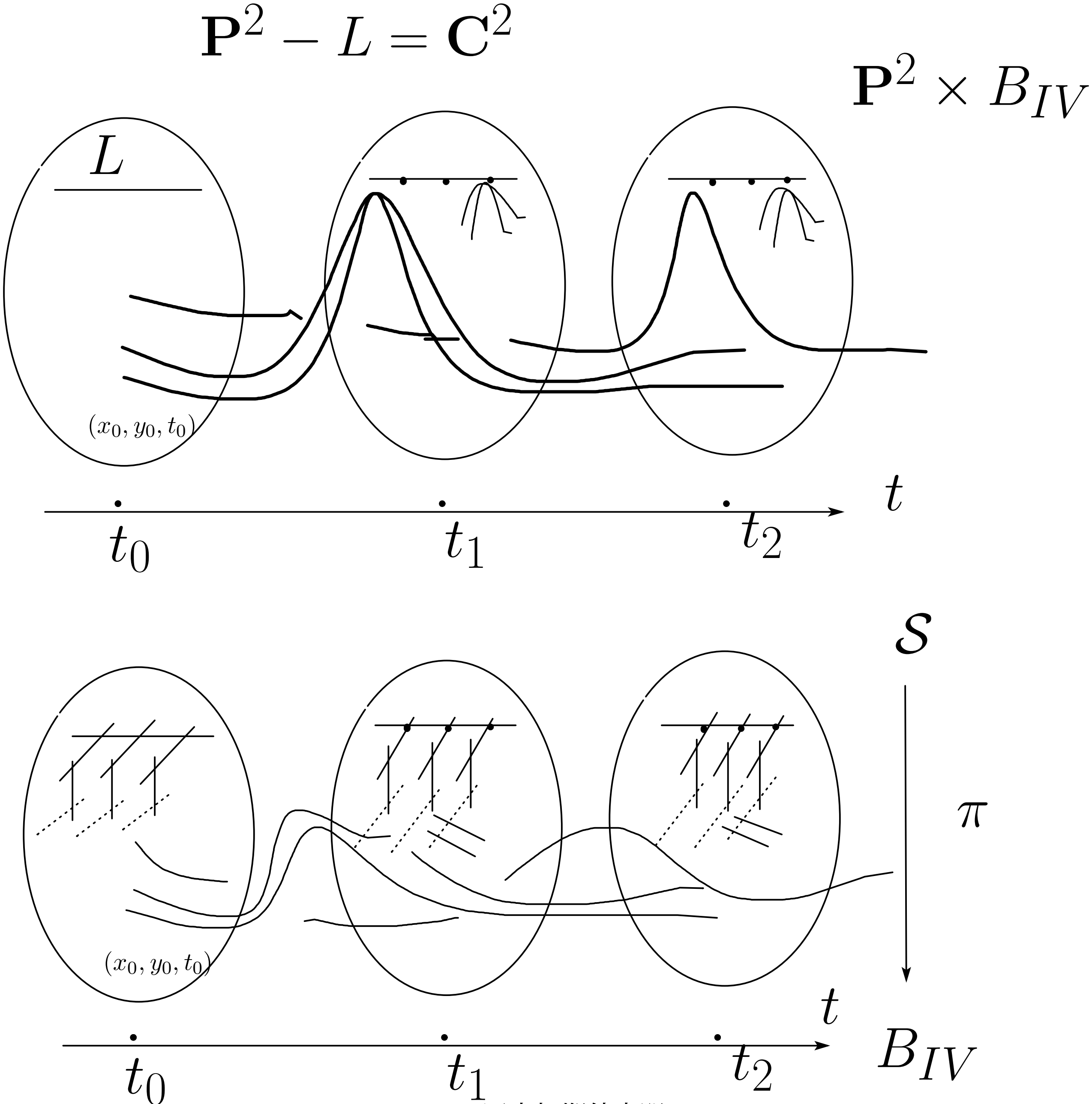


Figure 1. P_{IV} の岡本初期値空間

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{P}^2 \times B_J & \xleftarrow{\tau} & \mathcal{S} \\
\downarrow & \swarrow \pi & \\
B_J & &
\end{array}
\tag{10}
$$

$\mathbf{P}^2 \times B_J$の9回のブローアップの連続により, smooth射$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow B_J$が得られ, 解曲線のリーフはすべて分離されている状況にできる事を示した．(FIGURE 1).

これは, 小平–スペンサーの意味で有理曲面の変形族をなしている.

このファミリーに関して次の命題が成り立つが容易に分かる. (岡本，坂井，高野, 齋藤-竹部-寺島).

命題 0.1. 1. B_Jの一般の点tにおいて, *そのファイバー $S = \mathcal{S}_t$ は$\mathbf{P}^2$内の9点(Infinitely near point を含む) のブローアップにより得られる.*

2. *$S = \mathcal{S}_t$の有理2形式のつくる極の因子(今は代数曲線の形式和，反標準因子）$-K_S$は有効因子$Y = \Sigma_{i=1}^r m_i Y_i$ （$m_i > 0$) で与えられる.*

3. *曲線Yのコンフィギュレーションは小平–Néronの特異楕円曲線の極小モデルで加法的な閉ファイバーのコンフィギュレーションと同型．(Table* **??** *を参照.)*

さて反標準因子を

$$-K_S = Y = \sum_{i=1}^{r} m_i Y_i.$$

と既約分解する時, S が有理曲面と仮定すると Y のコンフィギュレーションが特異楕円曲線の小平–Néron モデルになるためには次の数値的条件が必要十分である.

各 $i, 1 \leq i \leq r$ に対して,

$$\boxed{\deg -(K_S)_{|Y_i} = -K_S \cdot Y_i = Y \cdot Y_i = 0.}$$

岡本　パンルベ対

上の条件を一般化して次の定義を得る. (坂井, 齋藤-竹部-寺島).

定義 0.3. (S, Y) を非特異射影的複素曲面 S とその(正) 反標準因子 $Y \in |-K_S|$ の組とし, $Y = \Sigma_{i=1}^{r} m_i Y_i$ をその既約分解とする. (S, Y) が次の条件をみたすとき, (一般化された) **岡本・パンルベ対** という.

$1 \leq i \leq r$ に対して

$$\boxed{-K_S \cdot Y_i = Y \cdot Y_i = \deg -K_{S|Y_i} = 0.}$$

(S, Y): 岡本・パンルベ対.

ω_S: Sの有理2形式で, その極因子$(= -K_S)$ がYであるものが存在する. $S-Y$上で, ω_S は 正則な非退化2形式である.

この意味で, (S, ω_S, Y) を

<u>対数的シンプレクテック多様体</u>

と呼びたい.

<u>対数的シンプレクテック多様体の例</u>

$$(S = \mathbf{P}^2, \omega_{S|\mathbf{C}^2} = dx \wedge dy, Y = 3L).$$

$$(X = \mathbf{P}^{2n}, \omega_{X|\mathbf{C}^{2n}} = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i, Y =?L).$$

上の岡本・パンルベ条件は, 対数的シンプレクテック多様体が, シンプレクテック構造の退化する境界で 良い条件を満たす事を示す.

岡本・パンルベ対 (S, Y) は S が有理曲面の時 **有理的** と呼ばれる．以後有理的岡本・パンルベ対のみを考える．次の命題は標準的な議論から分かる．

命題 0.2. 1. (S, Y) を有理的な岡本・パンルベ対とすると S は $\mathbf{P}^2$ の 9点ブローアップで得られる.

2. もしある正整数 $n \geq 1$ があって $\dim |-nK_S| = \dim |nY| = 1$ であれば, $f^*(\infty) = nY$ を満たす有理的楕円曲面の構造 $f : S \longrightarrow \mathbf{P}^1$ が存在する.

定義 0.4. 有理的な岡本・パンルベ対 (S, Y) はある自然数 n について $f^*(\infty) = nY$ を満たす有理的楕円曲面の構造 $f : S \longrightarrow \mathbf{P}^1$ を持つ時, *fibered–type* と呼ぶ．*fibered–type*でないとき, “*non-fibered type*” と呼ぶ.

命題 0.3. (S, Y) を有理的岡本・パンルベ対で Y の被約成分 Y_{red} が正規交差因子とすると Y のタイプ $R(Y)$ は *Table* **??**で与えられる.

まとめ

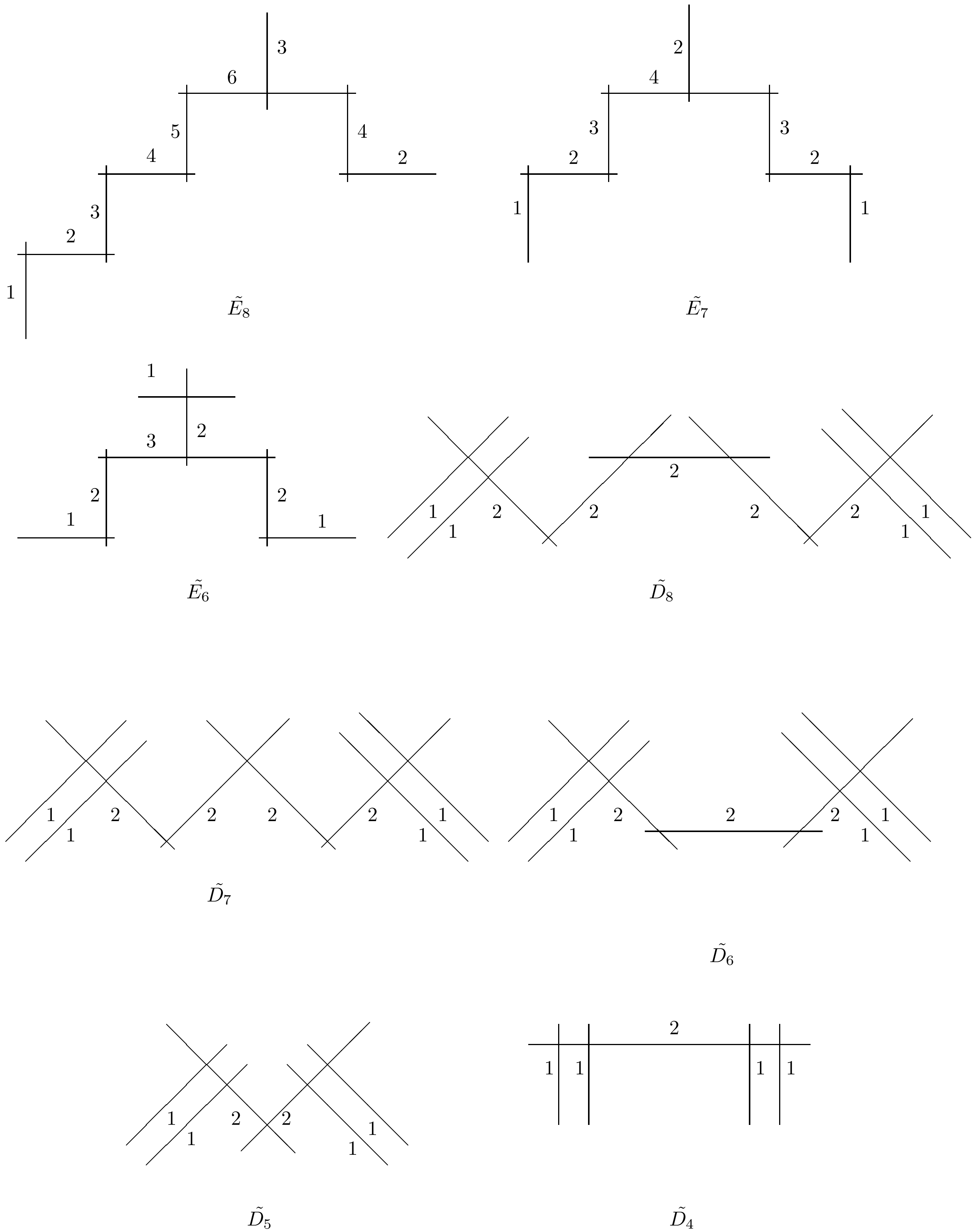
$\boxed{\text{パンルベ方程式}} \Longrightarrow \boxed{\text{岡本・パンルベ対 } (S, Y)}$

問題

1. 逆の方向の可能性は？

$\boxed{\text{岡本・パンルベ対 } (S, Y)} \Longrightarrow \boxed{\text{パンルベ方程式}}$

2. ハミルトニアンにかける意味は？
3. パンルベ方程式の対称性の幾何学的意味は？
4. 高次元化は？ 野海・山田の $\tilde{A}_l$ 型アファインワイル群対称性をもつ常微分方程式の初期値空間は？



$\tilde{E}_8$
$\tilde{E}_7$
$\tilde{E}_6$
$\tilde{D}_8$
$\tilde{D}_7$
$\tilde{D}_6$
$\tilde{D}_5$
$\tilde{D}_4$

FIGURE 2

岡本・パンルベ対の変形理論

- (S, Y) を有理的岡本・パンルベ対
- $$-K_S = Y = \sum_{i=1}^{r} m_i Y_i$$
  を反標準因子の既約分解とし,
  $$D = Y_{red} = \sum_{i=1}^{r} Y_i$$
  と置く.

1. (S, Y) は non-fibered type,
2. $D = Y_{red}$ は正規交差因子で $r \geq 2$

と仮定する. $Y_i \simeq \mathbf{P}^1$.

非特異対の変形理論

コンパクト複素多様体の複素構造の変形理論は小平・スペンサーによって確立された. 川又は, それを非特異対 $(S, D) = (S, Y_{red})$ の変形理論に対して拡張した.

1. (S, D) の無限小変形全体の空間：
$$H^1(S, \Theta_S(-\log D))$$
2. 障害のすむ空間:
$$H^2(S, \Theta_S(-\log D)).$$

ここで, $\Theta_S(-\log D)$ は, 正則ベクトル場で, $D \subset S$ の定義イデアルを保つもの局所切断の芽のなす層である. (対数的ベクトル場の芽のなす層).

簡単な議論から, 有理岡本・パンルベ対(S, Y)に対し

1.
$$\dim H^1(S, \Theta_S(-\log D)) = 10 - r,$$

2.
$$H^2(S, \Theta_S(-\log D)) = \{0\}$$

がわかる. ここで, r は $D = Y_{red}$ の既約成分の個数である事に注意する. この事より, (S, D) の複素構造の局所変形空間は**非特異**で $10 - r$ **次元**である事がわかる.

局所コホモロジー完全系列による変形空間の分解

命題 0.4. (齋藤・竹部・寺島) *non-fibered type*の有理的岡本・パンルベ対(S,Y)については次の完全列が得られる．

$$0 \to \; H^1_D(\Theta_S(-\log D)) \;\to\; H^1(S,\Theta_S(-\log D)) \;\overset{\mathrm{res}}{\to}\; H^1(S-D,\Theta_S(-\log D))$$

定理 0.2. (寺島). (S,Y) を上の条件を満たす有理的岡本・パンルベ対としY を加法的とする．すると

$$\dim H^0(D,\Theta_S(-\log D)\otimes N_D)=1. \tag{11}$$

ここで $N_D=\mathcal{O}_S(D)/\mathcal{O}_S$. 自然な単射

$$H^0(D,\Theta_S(-\log D)\otimes N_D)\hookrightarrow H^1_D(\Theta_S(-\log D))$$

が存在するので$\dim H^1_D(\Theta_S(-\log D))\geq 1$. (実際は, ほとんどの場合次元が1である事が示される*)*.

さて上の完全系列から, $H^1(S, \Theta_S(-\log D))$ の部分空間 $H^1_D(S, \Theta_S(-\log D))$ は線型写像 res の核と一致する．これから次が分かる.

$$H^1_D(S, \Theta_S(-\log D)) \simeq \left\{ \begin{array}{l} (S, D) \text{ の無限小変形で} \\ S - D \text{ への制限が自明な変形を導くもの.} \end{array} \right\}.$$

岡本・パンルベ対の大域的ファミリー

パンルベ方程式に対応する岡本・パンルベ対の大域的ファミリーが得られる.

命題 0.5. $R = R(Y)$ ：*Table 2* に現れる加法的なアファインルート系. 次の様な多様体と写像が存在する.

1. $\mathcal{M}_R$ を $\mathbf{C}^s = \mathrm{Spec}\mathbf{C}[\alpha_1, \cdots, \alpha_s]$ の次元 $s = 9 - r$ のアファイン開集合.
2. $\mathcal{B}_R$ を $\mathbf{C} = \mathrm{Spec}\mathbf{C}[t]$ のアファイン開集合.
3. 可換図式で下記の条件を満たすものが存在する.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \hookleftarrow & \mathcal{D} \\ \pi \downarrow & \swarrow & \varphi \\ \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R & & . \end{array} \tag{12}$$

1. 上の図式はタイプ $R(Y)$ の岡本・パンルベ対 (S, Y) の大域的ファミリーである.
2. 相対有理 2形式
$$\omega_{\mathcal{S}} \in \Gamma(\mathcal{S}, \Omega^2_{\mathcal{S}/\mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R}(\mathcal{Y}))$$
が存在しその極因子は $\mathcal{Y}$ で与えられ $\mathcal{Y}_{red} = \mathcal{D}$.
3. 上のファミリーは一般の点 $(\boldsymbol{\alpha}, t) \in \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ で半普遍的, すなわち小平・スペンサー写像
$$\rho : T_{\boldsymbol{\alpha},t}(\mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R) \longrightarrow H^1(\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(-\log \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t})) \tag{13}$$
は $(\boldsymbol{\alpha}, t)$ で同型である.

   さらに t 方向の小平・スペンサー類 $\rho(\frac{\partial}{\partial t})$ は
$$\delta : H^0(\mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(-\log \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t}) \otimes N_{\mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t}}) \hookrightarrow H^1(\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(-\log \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t})). \tag{14}$$
の像に入っている.

　ここで, 構成された岡本・パンルベ対の大域族において, パンルベ方程式と同値な接ベクトル場は次のように特徴づけられ, また, このベクトル場が相対2形式を保つ事が示される.

定理 0.3. $R = R(Y)$, $\mathcal{S}, \mathcal{D}, \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$を上の通りとする. すると, $\mathcal{S}$ 上の有理ベクトル場

$$\boxed{\tilde{v} \in \Gamma(\mathcal{S}, \Theta_{\mathcal{S}}(-\log \mathcal{D}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\mathcal{D}))} \tag{15}$$

であって $\frac{\partial}{\partial t}$ の持ち上げ (すなわち, $\pi_*(\tilde{v}) = \frac{\partial}{\partial t}$)であるものが一意的に存在する. また次が成り立つ.

$$\boxed{d_{\mathcal{S}/\mathcal{M}}(\tilde{v} \cdot (\omega_{\mathcal{S}} \wedge dt)) = 0.} \tag{16}$$

上のファミリーからベクトル場を得る方法

大体の場合$\mathcal{S}$の有限アファイン被覆$\{\tilde{U}_i\}_{i=1}^{l+k}$で各$i$に対し

$$\tilde{U}_i \;\simeq\; \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R \times \mathbf{C}^2 \ni (\boldsymbol{\alpha}, t, x_i, y_i)$$

となるものが取れる．さらに相対有理2形式は$\omega_{\mathcal{S}}$各開被覆上で

$$\omega_{\mathcal{S}|\tilde{U}_i} = dx_i \wedge dy_i$$

と書ける．

各添え字i, jで$\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \emptyset$なるものについて座標変換

$$x_i = f_{ij}(x_j, y_j, \boldsymbol{\alpha}, t), \quad y_i = g_{ij}(x_j, y_j, \boldsymbol{\alpha}, t)$$

は$x_j, y_j, \boldsymbol{\alpha}, t$の有理関数で書かれる．小平・スペンサー類$\rho(\frac{\partial}{\partial t})$は，各$\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$上で与えれる１－コサイクル

$$\{\theta_{ij} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y_i}\}$$

で与えられる．この類は

$$H^1(\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(-\log \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t}) \otimes \mathcal{O}_S(\mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t})).$$

では0ではないが，

$$H^1(\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}, \Theta_{\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha},t}}(-\log \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t}) \otimes \mathcal{O}_S(\mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha},t})).$$

の中で0である事がわかる．

これらのコホモロジーの次元が一定であるから，基底変換定理を用いれば各$1 \;\leq\; i \;\leq\; l+k$について

$\Gamma(\tilde{U}_i, \Theta_{\tilde{U}_i}(-\log \mathcal{D}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{D}))$ に属する有理的ベクトル場

$$\theta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t) = \eta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \zeta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t)\frac{\partial}{\partial y_i}$$

が存在して

$$\theta_{ij}(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t) = \theta_j(x_j, y_j, \boldsymbol{\alpha}, t) - \theta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t).$$

とできることが分かる.

さて $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$ 上で

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i + \theta_{ij}(\boldsymbol{\alpha}, t),$$

であるから

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j - \theta_j(x_j, y_j, \boldsymbol{\alpha}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i - \theta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t).$$

よってベクトル場

$$\{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i - \theta_i(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}, t)\}_{1 \le i \le l+k}$$

は張り合って, $\mathcal{S}$ 上定義された $\mathcal{D}$ のみに極を有す大域的な有理ベクトル場

$$\tilde{v} \in \Gamma(\mathcal{S}, \Theta_{\mathcal{S}}(-\log \mathcal{D}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{D}))$$

を与える.

岡本・パンルベ対の条件の意味とその高次元化

岡本・パンルベ対 (S, Y) の条件 (11)

$$\boxed{-K_S \cdot Y_i = Y \cdot Y_i = \deg Y_{|Y_i} = 0.}$$

は簡単ではあるが，パンルベ方程式を特徴づけてしまう強力なものであった．坂井秀隆氏の研究により離散パンルベの場合も含めて上の条件が重要であることが分かっている．

しかしこの条件が 一体何を意味するのか？

$\mathbf{C}^{2n}$ のあるアファイン開集合 U の座標

$$(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{C}^{2n}$$

を用いてシンプレクテック形式が

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

と書ける時，それに対するハミルトン系は

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n$$

で与えられる．$H = H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ が $\mathbf{x}, \mathbf{y}, t$ の多項式とするとこの微分方程式系は $U \times \mathbf{C} \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ 上の代数

的ベクトル場

$$\tilde{v} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i}$$

と同値である．

これらを，コンパクト化したところの有理ベクトル場と思った時，パンルベ方程式と同じ様な大域ファミリーが構成したい．

$\mathcal{B} \subset \mathbf{C}$ のアファイン開集合とする．対数的シンプレクテック多様体の変形で，

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{P}^{2n} \times \mathcal{B} & \leftarrow & \mathcal{X} & \hookleftarrow & \mathcal{D} \\ \downarrow & & \pi \downarrow & \swarrow & \varphi \\ \mathcal{B} & = & \mathcal{B} & & \end{array}.$$

次の条件を満たすものを構成したい．

1. 相対有理2形式

$$\omega_{\mathcal{X}} \in \Gamma(\mathcal{X}, \Omega^2_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}(\mathcal{Y}))$$

が存在しその極因子は $\mathcal{Y}$ で与えられ $\mathcal{Y}_{red} = \mathcal{D}$．また $\mathcal{X} - \mathcal{D}$ 上では各ファイバーで $\omega_{\mathcal{X}}$ は非退化2形式である．

2. $\mathcal{X}$ 上の有理ベクトル場

$$\tilde{v} \in \Gamma(\mathcal{X}, \Theta_{\mathcal{X}}(-\log \mathcal{D}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{D}))$$

で，$\frac{\partial}{\partial t}$ の π による持ち上げ（$\Leftrightarrow \pi_*(\tilde{v}) = \frac{\partial}{\partial t}$）であるものが存在する．（$\tilde{v}$ は $\mathcal{X} - \mathcal{D}$ 上に代数的ベクトル場を定める.)

3. 次が成立する.

$$d(\tilde{v}\cdot(\omega_{\mathcal{X}}\wedge dt))=0.$$

πの相対次元が2の時に次がいえる.

命題 0.6. 上の変形族が *2*次元代数曲面の族であるとすると, 次の命題は同値になる.

1. 有理ベクトル場$\tilde{v}$は$accessible$特異点を持たない.
2. 各ファイバー$\mathcal{X}_t$に対し, $(X,Y)=(\mathcal{X}_t,\mathcal{Y}_t)$, $\mathcal{Y}_t\in|-K_{\mathcal{X}_t}|$とすると, 岡本・パンルベ対の条件を満たす.

この命題から, 岡本・パンルベ対の条件は, 上の様な有理ベクトル場がaccessible特異点を持たない為の条件である事が分かる.

ファイバーが高次元のときでも次がいえる. $\mathcal{D}$を既約分解する.

$$\mathcal{D}=\sum_{i=1}^{r}\mathcal{D}_i$$

簡単のために各tに対して$\mathcal{D}_t$の既約分解も$\sum_{i=1}^{r}\mathcal{D}_{i,t}$で与えられるとする.

命題 0.7. 上の状況で次の事が成り立つ. $t\in\mathcal{B}$に対して, 集合を

$$Acc(\tilde{v},\mathcal{D}_{i,t}):=\{\tilde{v}\text{の}\mathcal{D}_{i,t}\text{に置ける}\,accessible\text{特異点}\}$$

と定める. $N_{\mathcal{D}_{i,t}/\mathcal{X}_t}$を$\mathcal{D}_{i,t}$の法束とするとき，ベクトル束の切断$s\in H^0(\mathcal{D}_{i,t},\Theta_{\mathcal{D}_{i,t}}\otimes N_{\mathcal{D}_{i,t}/\mathcal{X}_t})$が存在して$Acc(\tilde{v},\mathcal{D}_{i,t})\subset\{s\text{のゼロ点}\}$が成り立つ. 特に, ベク

トル束 $\Theta_{\mathcal{D}_{i,t}} \otimes N_{\mathcal{D}_{i,t}/\mathcal{X}_t}$ のトップチャーン類が消えていれば, すなわち

$$\boxed{c_{2n-1}(\Theta_{\mathcal{D}_{i,t}} \otimes N_{\mathcal{D}_{i,t}/\mathcal{X}_t}) = 0}$$

であれば $\tilde{v}$ は $\mathcal{D}_{i,t}$ において *accessible* 特異点を持たない.

注意 0.1. 上の条件が, *2* 次元の場合, 岡本・パンルベ対の条件と同値である.

注意 0.2. 野海・山田 [NY2] によって導入された $\tilde{A}_l$ の対称性を持つ高階のパンルベ方程式系のうち, $\tilde{A}_4$ の場合を考察すると初期値空間は $\mathbf{P}^4$ の境界 $H = \mathbf{P}^3$ で適当に *blow-up* したものである. この時, *blow-up* する前の $\mathbf{P}^4 \times \mathbf{P}^1$ 上の有理ベクトル場 $\tilde{v}$ で境界 $H \times \mathbf{P}^1$ で一位の極をもつものが存在する. この時, $\tilde{v}$ は *accesible* 特異点を持つ事が分かる. 一方

$$c_3(\Theta_{\mathbf{P}^3}(N_{H/\mathbf{P}^3})) = 15\ points$$

である事が分かる. よって, *15* 点の *blow-up* が必要になるが, 神戸大院生の田原伸彦の計算 [Tah1], [Tah2] と整合している. しかし, この場合, *15* 点の内の *5* 点は *blow-up* だけで *accessible* 特異点の解消はできるが, その他の点の特異点解消はかなり複雑である.

まとめ

良い対数的シンプレクテック多様体の変形から，パンルベ型微分方程式系が得られるであろう．その幾何学が，パンルベ型方程式の理解を深めるであろう．

これからの問題

1. 良い初期値空間を作る事は, 有理的ベクトル場を込めた多様体の極小モデル理論(森理論)を作る事である．4次元以上の極小モデルの理論は非常に難しい事が予想されているが，意味のある場合には手がかりが得られる事が期待される．
2. 野海・山田の理論は，ある意味で，離散および連続の方程式系の双有理幾何学の理論である．これを，コンパクト化したところまで込めて理論を作る事が双正則な幾何学を作ることに対応する．
3. τ 関数の理論が，我々の理論でどの様に解釈できるか？
4. パンルベ方程式系と線形方程式のモノドロミー保存変形の理論とのつながりから，量子コホモロジー，Frobenius 構造，齋藤恭司氏の特異点の変形空間の平坦構造との関係が存在する事が予想される．これらの理論とパンルベ方程式の理論のわかりやすい記述は如何に？(岩崎氏の理論，Boalch の理論，Dubrovin の理論等の関係...)
5. 特殊解の幾何学的特長づけ.
6. 非可換幾何学との関係は？
7. など、など 夢はひろがるが …

御来聴感謝いたします.

References

[Gr] A. Grothendieck, *Local cohomology*, (noted by R. Hartshorne), Lecture Notes in Math. 41, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1967), 106 pp.

[I] K. Iwasaki, *Moduli and deformation for Fuchsian projective connections on Riemann surface*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 38, (1991), 431–531.

[IKSY] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé, Vieweg, 1991.

[Kaw] Y. Kawamata, *On deformations of compactifiable manifolds*, Math. Ann., **235**, (1978), 247–265.

[Ki] H. Kimura, *Uniform foliation associated with the Hamiltonian system H_n*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 20 (1993), no. 1, 1–60.

[Kod] K. Kodaira, *On compact analytic surfaces*, II, Annals of Math., **77**, (1963), pp. 563–626.

[KodT] K. Kodaira, Complex manifolds and deformations of complex structures, Springer–Verlag, 1985.

[NTY] M. Noumi, K. Takano and Y. Yamada, *Bäcklund Transformations and the Manifolds of Painlevé Systems*, Preprint, Kobe, 2001.

[NY1] M. Noumi and Y. Yamada, *Affine Weyl Groups, Discrete Dynamical Systems and Painlevè Equations*, Comm Math Phys **199**, (1998), 2, pp281-295

[NY2] M. Noumi and Y. Yamada, *Higher order Painlevé equation*s of type $A_l^{(1)}$* , Funckcial. Ekvac., **41** (1998), 483–503.

[MMT] T. Matano, A. Matumiya and K. Takano, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems, II*, J. Math. Soc. Japan, **51**, No.4, 1999, 843–866.

[OkaT] 岡本和夫, **パンルヴェ方程式序説**, 上智大学数学講究録 No.19 (1985)

[O1] K. Okamoto, *Sur les feuilletages associés aux équation*s du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, Espaces des conditions initiales*, Japan. J. Math., **5**, 1979, 1–79.

[O2] ———, Painlevé の方程式, 数学, **32** (1980), 30–43.

[O3] ———, *Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equation*s*, I, II, Proc. Japan Acad., **56**, (1980), 264–268; ibid, 367–371.

[O4] ———, *Isomonodromic deformation and Painlevé equation*s, and the Garnier systems*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math., 33, (1986), 575–618.

[O5] ———, *Studies on the Painlevé equation*s I.* Annali di Mathematica pura ed applicata **CXLVI** 1987, 337–381; II. Japan. J. Math., **13**, (1987), 47–76; III. Math. Ann. **275** (1986), 221–255; IV. Funkcial. Ekvac. Ser. Int. **30** (1987), 305–332.

[STa] M.-H. Saito and T. Takebe, *Classification of Okamoto–Painlevé pairs.* preprint, Kobe 2000. math.AG 0006028

[STT] M.-H. Saito, H. Terajima and T. Takebe, *Deformation of Okamoto–Painlevé pairs and Painlevé equation*s.* to appear in Jour. of Algebraic Geometry, math.AG 0006028 .

[STe1] M.-H. Saito and H. Terajima, *Nodal curves and Riccati solutions of Painlevé equation*s*, preprint 2002, Kobe, math.AG/0201225, 30 pages.

[STe2] M.-H. Saito and H. Terajima, *Semiuniversal families of generalized Okamoto–Painlevé pairs and explicit descriptions of Painlevé equation*s.* in preparation.

[SU] M.-H. Saito and H. Umemura, *Painlevé equation*s and deformations of rational surfaces with rational double points.* Proceedings of the Nagoya 1999 International Workshop, Physics and Combinatorics, 1999, edited by A. Kirillov, A. Tsuchiya and H. Umemura, 320–365.

[Sakai] H. Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equation*s*, Commun. Math. Phys. **220**, 165–229 (2001).

[ShT] T. Shioda and K. Takano, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I*, Funkcial. Ekvac., **40**, 1997, 271–291.

[Tah1] 田原伸彦, $A_4^{(1)}$ 型方程式の初期値空間について, パンルベ方程式の眺望, 高野恭一, 野海正俊編, Rokko Lecture in Math., **7**, (2000), 121–130.

[Tah2] N. Tahara, *On a space associated with a nonlinear equation* of type $A_4^{(1)}$*, preprint.

[Te] H. Terajima, *Local cohomology of generalized Okamoto–Painlevé pairs and Painlevé equation*s.* Preprints, Kobe, May, 2000, math.AG 0006027.

[U1] 梅村 浩 *Painlevé* **方程式の既約性について**, 数学, **47**, (1988), 47–61.

[U2] 梅村浩, *Painlevé* **方程式の** *100* **年**, 数学, **51**, (1999), 395-420.