Mordell-Weil 格子と ある種の Calabi-Yau 多様体

Masa-Hiko Saito
齋藤　政彦

京都大学理学研究科

0 Introduction

昨年の札幌での workshop では、種数 $g \geq 1$ の曲線の族に対するヤコビ多様体の Mordell-Weil 格子の階数 (Mordell-Weil rank) を曲面の数値不変量で上から押さえる事について述べた。([Sa1, 2])。　榊原氏との共著論文 ([Sa-Sak]) では有理曲面の時に Mordell-Weil rank の上限は $4g+4$ である事を示し、その上限を与える曲線の族の構造定理や、 Mordell-Weil 格子の構造定理を得た。そこに現われる格子は D_{4g+4}^{+} という unimodular 格子であるが、その性質等については 95 年度の城崎の報告集に書いたのでここでは触れない。
このノートでは、有理曲面上の種数 2 の曲線束から得られる 3 次元カラビ = ヤウ多様体について述べる。　特にそのモヂュライ空間は、ホッヂ理論、 完全積分可能系にも関係し興味深い。

1 Mordell-Weil 格子の理論

代数閉体 k 上定義された非特異射影曲線 C の関数体を $K = k(C)$ とし、体 K 上定義された種数 $g \geq 1$ の非特異射影曲線を Γ とする。曲線 Γ のヤコビ多様体を J_Γ とすると、 J_Γ は K 上定義されたアーベル多様体であることが知られている。 J_Γ の K- 有理点の集合 $J_\Gamma(K)$ は、自然なアーベル群の構造をもち、モーデル = ベイユ群 (**Mordell-Weil group**) と呼ばれる。幾何学的には、 モーデル = ベイユ群は次の様に理解される。一般論により、 K 上定義されたアーベル多様体 J_Γ の、 C 上での Néron model

$$h : \mathcal{J}^0 \longrightarrow C$$

が存在する。 $h : \mathcal{J}^0 \longrightarrow C$ は C 上の群スキームで、その生成ファイバーが J_Γ と K 上同型なものであるが、一般には C 上固有的ではない。 $h : \mathcal{J}^0 \longrightarrow C$ の代数的切断全体を $\mathcal{S}(\mathcal{J}^0/C)$ と書くとき、自然な同型

$$\mathcal{S}(\mathcal{J}^0/C) \simeq J_\Gamma(K)$$

が存在する。　また、 J_Γ の K/k-trace が自明な時、モーデル = ベイユ群 $J_\Gamma(K)$ は有限生成アーベル群である事が知られている。　　さて、代数曲面の極小モデルの理論より、非特異射影代数曲面 X と固有全射

$$f : X \longrightarrow C$$

が存在し、 f の生成ファイバーと Γ/K が同型になるものが存在する。さらに、 f のどの閉ファイバーにも第一種例外曲線を含まないと仮定してよい。 $\mathrm{NS}(X)$ を X のネロン = セベリ群とする。 $\mathrm{NS}(X)$ 上には、交点形式

$$(\quad,\quad):\mathrm{NS}(X)\times\mathrm{NS}(X)\longrightarrow\mathbf{Z}.$$

が定義されている。
さて、以下の議論を簡単にする為、 f の切断 $\sigma_0:C\longrightarrow X$ の存在を仮定し以下基点として固定する。その像 $O=\sigma_0(C)$ は X 上の曲線であるが、しばしば $\mathrm{NS}(X)$ での類を表わす事にする。また F で f の閉ファイバーの $NS(X)$ での類を表わす。 $\mathrm{NS}(X)$ の部分群 U,T を

$$U=<O,F>,\quad T=<U,\ f\text{の閉ファイバーの既約成分}>.$$

で定義する。ただし、 $<A,\cdots>$ は $A,\cdots$ で生成された部分群を表わす。明らかに $U\subset T\subset\mathrm{NS}(X)$ である。また $L=T^{\perp}\subset\mathrm{NS}(X)$ を T の (交点形式に関する) 直交補空間とする。ここで塩田氏の基本定理 ([Sh1], [Sh2]) を思いだしておこう。

Theorem 1.1 J_Γ の K/k-*trace* が自明とする。次の群の同型が存在する。

$$\varphi:\mathrm{NS}(X)/T\simeq J_\Gamma(K). \tag{1.1}$$

Theorem 1.2 J_Γ の K/k-*trace* が自明かつ $\mathrm{NS}(X)$ が捻れなしとする。群の準同型

$$\phi:J_\Gamma(K)\longrightarrow\mathrm{NS}(X)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q} \tag{1.2}$$

で、 $\phi(0)=\sigma_0$, $\mathrm{Im}(\phi)\perp T$ を満たすものが一意的に存在する。 ϕ の核は $J_\Gamma(K)$ の捻れ部分群 $J_\Gamma(K)_{tor}$ と一致し $\mathrm{Im}\phi\subset L^*=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(L,\mathbf{Z})$ である。

さて、 Theorem1.2 の ϕ を用いて、モーデル = ベイユ群 $J_\Gamma(K)$ の元 P,Q に対して

$$<P,Q>=-(\phi(P),\phi(Q))\in\mathbf{Q}$$

と定義する。すると、 $<\quad,\quad>$ は $J_\Gamma(K)/J_\Gamma(K)_{tor}$ 上の正定値対称 2 次形式となるが通常ハイトペアリングと呼ばれる。塩田氏 ([Sh1], [Sh2]) に従って

$$(J_\Gamma(K)/J_\Gamma(K)_{tor},<\ ,\ >)$$

をモーデル = ベイユ格子 (**Mordell-Weil lattice**) と呼ぶ。([Sa-Sak] を見よ。)　　このモーデル = ベイユ格子の理論は $g=1$ の時、すなわち $f:X\longrightarrow C$ が楕円曲面の時、塩田氏自身により E 型代数方程式論、特異点理論、 Sphere packing 等、広い範囲への応用を見い出されている。　(これらについては例えば [Sh3] を見よ。)

2 Mordell-Weil rank の上限および構造定理

この章では, 基礎体 k の標数を 0 とする[1]。 Γ/K, $f : X \longrightarrow C$ を一章の通りとし、切断 $\sigma_0 : C \longrightarrow X$ の存在、 J_Γ の K/k-trace は自明であると仮定する。モーデル = ベイユ群 $J_\Gamma(K)$ の階数 $r = \dim_{\mathbf{Q}} J_\Gamma(K) \otimes \mathbf{Q}$ はモーデル = ベイユ階数と呼ばれるがその上限を Γ/K または $f : X \longrightarrow C$ の不変量で与えると言う問題に興味がある。 k の標数が 0 の場合、 Xiao の slope inequality がその上限を与えるというのが、 [Sa-Sak] および [Sa1, 2] の observation であった。一般的な定理としては次がある ([Sa1, 2] を見よ)。

Theorem 2.1 上記の仮定のもとに、次の不等式が成立する。

$$r \leq (6 + 4/g)\chi(X, \mathcal{O}_X) + (1 - \pi)\{\frac{4g^2 - 2g - 4}{g}\}. \tag{2.1}$$

ここで π は C の種数を表わす。

次の定理は上の定理の特別な場合である。 ([Sa-Sak])。

Theorem 2.2 $f : X \longrightarrow C$ を上の通りとし、さらに $p_g(X) = q(X) = 0$ を仮定する。 すると

$$r \leq 4g + 4. \tag{2.2}$$

さらに、上の等号を満たす、 $f : X \longrightarrow \mathbf{P}^1$ の例が存在する。特に等号を満たすものの一般ファイバーは超楕円曲線である。

Theorem 2.2 において、等号を満たす曲線束 $f : X \longrightarrow \mathbf{P}^1$ については、次の構造定理がある。 $\Sigma_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ とし、 p_1, p_2 をそれぞれの成分への射影とする。 $F_i \subset \Sigma_0$ を p_i の閉ファイバーのクラスとする。 Σ_0 の曲線 B が $aF_1 + bF_2$ と線形同値の時、 B の bidegree が (a, b) であるという。

Theorem 2.3 $g \geq 2$ の時、 $f : X \longrightarrow \mathbf{P}^1$ を *Theorem 2.2* の通りでかつ $r = 4g + 4$ とする。 この時、 *bidegree* $(2, 2g + 2)$ の非特異分岐因子 $B \subset \Sigma_0$ をもつ二重被覆射 $\pi : X \longrightarrow \Sigma_0$ が存在する。さらに、 f は第一射影 $p_1 : \Sigma_0 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ から誘導される *(*すなわち $f = p_1 \circ \pi$*)*。逆にこの構成で作った $f : X \longrightarrow \mathbf{P}^1$ は切断を持ちまた f のすべての閉ファイバーが既約ならば、 $r = 4g + 4$ である。

Theorem 2.3 の X は容易に有理曲面である事がわかる。またこの構造定理により、 $p_g(X) = q(X) = 0, r = 4g + 4$ の時のモーデル = ベイユ格子の構造定理を得る。 ([Sa-Sak]).

Remark 2.1 今野氏 [Ko] は、曲線束 $f : X \longrightarrow C$ の一般ファイバーが超楕円的でない時、 *slope inequality* を改善した。これより、一般ファイバーが超楕円的でないと仮定し $p_g(X) = q(X) = 0$ とすると、 $r \leq 3g + 6$ を得る。さらに、等号を満たす時の曲線束およびモーデル = ベイユ格子の構造定理も示すことができる。 *(Nguyen* 氏との共同研究 [N-S] を見よ。*)*

[1] 最近、森脇氏 [Mo] は slope inequality を標数一般に拡張した。これにより標数一般に容易に拡張できる結果もある。

3　ある種の Calabi-Yau 多様体

この章では、基礎体を $k = \mathbf{C}$ とする。まず次の補題を注意する。

Lemma 3.1 $f : X \longrightarrow \mathbf{P}^1$ を種数 $g \geq 1$ の曲線束で、 $p_g(X) = q(X) = 0$ と仮定する。次が成立する。

$$R^1 f_* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)^{\oplus g}, \quad f_* \omega_{X/S} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus g}. \tag{3.1}$$

Proof.　まず $i = 1, 2$ の時、 $H^i(X, \mathcal{O}_X) = (0)$ に注意して、 f に関する Leray スペクトル系列を考えると, $k = 0, 1$ について

$$H^k(\mathbf{P}^1, R^1 f_* \mathcal{O}_X) = (0)$$

が導かれる。良く知られたように $R^1 f_* \mathcal{O}_X$ は ($\mathbf{P}^1$ 上の) 局所自明層であるから、直線束に分解し上の事から補題を得る。 ($f_* \omega_{X/S}$ についてはこの結果と双対定理から従う。)

Proposition 3.1 $f : X \longrightarrow \mathbf{P}^1$ を *Lemma 3.1* と同様とする。さらに、 Γ を生成ファイバーとし、切断 $\sigma_0 : \mathbf{P}^1 \longrightarrow X$ の存在を仮定する。 J_Γ / K *(*但し $K = \mathbf{C}(t)$*)* の $\mathbf{P}^1$ 上の *Néron* モデルを $\mathcal{J}^0 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ とする。　このとき次の性質を満たす $\mathcal{J}^0 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ の相対コンパクト化 $h : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{P}^1$ が存在するとする。

1. $\mathcal{J}$ は射影的かつ非特異。
2. Σ を f の臨界値とするとき $Y = h^*(\Sigma)$ は被約正規交差因子である。
3. 自然な層の射
$$h^*(h_* \Omega^1_{\mathcal{J}/\mathbf{P}^1}(logY)) \stackrel{\simeq}{\to} \Omega^1_{\mathcal{J}/\mathbf{P}^1}(logY)$$
は同型。

この時、 $\mathcal{J}$ の標準層を $K_{\mathcal{J}}$ とすると次が成立する。

$$K_{\mathcal{J}} = h^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(g-2)).$$

Proof　まず、 $\mathbf{P}^1 - \Sigma$ 上では f も h も smooth 射であり、その上の各ファイバーは非特異曲線とそのヤコビアンであるから同型

$$(f_* \omega_{X/\mathbf{P}^1})_{|\mathbf{P}^1 - \Sigma} \simeq (h_* \Omega^1_{\mathcal{J}/\mathbf{P}^1}(logY))_{|\mathbf{P}^1 - \Sigma}$$

が存在する。 canonical extension の理論から $\mathbf{P}^1$ 上でも

$$f_* \omega_{X/\mathbf{P}^1} \simeq h_* \Omega^1_{\mathcal{J}/\mathbf{P}^1}(logY).$$

よって、 (3.1) より次を得る。

$$\bigwedge^g (h_* \Omega^1_{\mathcal{J}/\mathbf{P}^1}(logY)) \simeq \bigwedge^g (f_* \omega_{X/\mathbf{P}^1}) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(g).$$

一方仮定 1 より、 $\bigwedge^g(\Omega^1_{\mathcal{J}/\mathbf{P}^1}(logY)) \simeq h^*(\bigwedge^g(h_*\Omega^1_{\mathcal{J}/\mathbf{P}^1}(logY))) \simeq h^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(g))$ が成立する。 $K_{\mathcal{J}/\mathbf{P}^1} = \bigwedge^g(\Omega^1_{\mathcal{J}/\mathbf{P}^1}(logY))$ であるから、上とあわせて

$$K_{\mathcal{J}} = K_{\mathcal{J}/\mathbf{P}^1} \otimes h^*(\Omega^1_{\mathbf{P}^1}) \simeq h^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(g-2))$$

を得る。

Proposition 3.1 のモデル $\mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{P}^1$ の存在について、 f が semistable 曲線の族の時、アーベル多様体の semistable 退化の理論を使えば存在を示せると思うが一般には良く分からない。 $g = 2$ の場合は中村氏 [Nak] の詳細な結果があり次の結果がわかる。

Theorem 3.1 $f : X \longrightarrow \mathbf{P}^1$ を *Lemma 3.1* と同様とし、 f の特異ファイバーは既約で一個の *node* のみを持つとする。 *(*すなわち *Lefschetz pencil* を取る。 *)* $g = 2$ の時、 *Proposition 3.1* の条件 *1, 2, 3* を満たす相対コンパクト化 $\mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{P}^1$ が存在する。 この時、 $\mathcal{J}$ は自明な標準束をもつ。すなわち、 $\mathcal{J}$ は 3 次元カラビ = ヤウ多様体である。

Remark 3.1 *Theorem 3.1* の種数 *2* の *Lefschetz* 束 $f : X \longrightarrow \mathbf{P}^1$ に対して、ヤコビアンの族 $\mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{P}^1$ でカラビ = ヤウ多様体になるものを得ることができた。さらに、 f の切断 $(\sigma : \mathbf{P}^1 \longrightarrow X) \in \Gamma(K)$ に対して標準埋め込み

$$i^\sigma : \Gamma \longrightarrow J_\Gamma$$

が定まる *(*例えば *[Mi, §2]* を見よ *)*。この i^σ は一意的に

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{i^\sigma}{\hookrightarrow} & \mathcal{J} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbf{P}^1 & \end{array} \tag{3.2}$$

に拡張する。 この時 $i^\sigma \circ \sigma$ が $\mathcal{J}^0/\mathbf{P}^1$ の零切断と一致する。注意して欲しいのは、各 f の非特異ファイバーで $i^\sigma(X)$ は $\mathcal{J}$ の主偏極因子与えていることである。
また $\mathcal{J}$ の Hodge diamond は以下の通り。 *(*自己ミラー双対である事に注意。 *)*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 14 & & 0 & \\ 1 & & 14 & & 14 & & 1 \\ & 0 & & 14 & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

4　カラビ＝ヤウ多様体のモヂュライ空間の記述

Theorem 2.3 に現われるモーデル＝ベイユ階数が極大の有理曲面 $f : X \longrightarrow \mathbf{P}^1$ は $\Sigma_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ の二重被覆であることがわかった。その分岐曲線 $B \subset \Sigma_0$ は bidegree が $(2, 2g+2)$ の非特異曲線であった。(B の種数は $g(B) = 2g+1$。) そこで次のモジュライ空間を考える。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(g) &:= \{\pi : X \longrightarrow \Sigma_0, X \text{ 非特異二重被覆で分岐曲線が } B \text{ が bidegree (2, 2g+2)}\}/\text{isom} \\ &\simeq \{B \subset \Sigma_0 \text{ smooth, bidegree of (2, 2g+2)}\}/\text{isom} \end{aligned}$$

$\iota : B \hookrightarrow \Sigma_0$ を $\mathcal{M}(g)$ に属する埋め込みとし

$$\begin{array}{ccccc} & & \Sigma_0 & & \\ & p_1 \swarrow & & \searrow p_2 & \\ \mathbf{P}^1 & & & & \mathbf{P}^1 \end{array} \tag{4.1}$$

から $\pi_i = \iota \circ p_i$ とおいて、

$$\begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 & \\ \mathbf{P}^1 & & & & \mathbf{P}^1 \end{array} \tag{4.2}$$

を得る。　$B \equiv 2F_1 + (2g+2)F_2$ であるから、

$$\deg \pi_1 = B \cdot F_1 = 2g+2, \quad \deg \pi_2 = B \cdot F_2 = 2$$

である。よって B は π_2 により超楕円曲線であり、$L = \pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1))$ は B 上の次数 $(2g+2)$、$h^0(L) = 2$ なる B 上の base point free な直線束である。よって、次のモヂュライ空間を考えよう。

$$\mathcal{W}(g) = \{(B, L)\}/\text{isom.}, \tag{4.3}$$

ただし B は種数 $2g+1$ の非特異超楕円曲線、L は B 上の $\deg L = 2g+2, h^0(B, L) = 2$ を満たす base point free な直線束。すると、モジュライ空間の間の自然な射が

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathcal{M}(g) & \longrightarrow & \mathcal{W}(g) \\ B \subset \Sigma_0 & \mapsto & (B, \pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1))) \end{array}$$

定義される。一方 φ の "逆写像" ϕ は次のように定義される。$(B, L) \in \mathcal{W}(g)$ に対して $\pi_1 : B \longrightarrow \mathbf{P}^1$ を超楕円曲線 B の g_2^1 から得られる射、また $\pi_2 : B \longrightarrow \mathbf{P}^1$ を L の定める射とする。正則写像 $\pi_1 \times \pi_2 : B \longrightarrow \Sigma_0$ を定めるが 、これが埋め込みになっている場合は逆写像が $\phi((B, L)) = \pi_1 \times \pi_2$ と定義される。さて次の補題が示せる。

Lemma 4.1 $(B, L) \in \mathcal{W}(g)$ ならば、上記の $\pi_1 \times \pi_2 : B \longrightarrow \Sigma_0$ は埋め込み。

このことから次が成立する。

Theorem 4.1

$$\varphi : \mathcal{M}(g) \stackrel{\simeq}{\to} \mathcal{W}(g) \tag{4.4}$$

$\pi : X \longrightarrow \Sigma_0 \in \mathcal{M}(g)$ とし、 $f = p_1 \circ \pi : X \longrightarrow \mathbf{P}^1$ と置くと、 f は種数 g の曲線束となる。 $\mathcal{M}(g)$ の Zariski 開集合 $\mathcal{M}(g)_{Lef}$ を

$$\mathcal{M}(g)_{Lef} := \{\pi : X \longrightarrow \Sigma_0 \in \mathcal{M}(2); f = p_1 \circ \pi \text{ が Lefschetz 束}\}$$

と定める。[2] Theorem 3.1 は $\pi : X \longrightarrow \Sigma_0 \in \mathcal{M}(2)$ から対応するヤコビアンの Néron model の良い相対コンパクト化 $\mathcal{J}$ が存在しそれが 3 次元カラビ = ヤウ多様体になる事を示している。この場合このコンパクト化は双正則同型を除いて一意的である事もわかる。よって Remark 3.1 に注意すれば

$$\mathcal{M}(2)_{Lef} \simeq \{(X \stackrel{i}{\hookrightarrow} \mathcal{J}); \text{ある切断に対する標準的埋め込み}\}/\text{isom.}$$

(同型は $\mathbf{P}^1$ 上の同型のみを考える。 $\mathcal{J}$ の切断は $\mathcal{J}/\mathbf{P}^1$ の translation 自己同型を引き起こす事を注意する。) この事より, $\mathcal{M}(2)_{Lef}$ はカラビ = ヤウ多様体とその主偏極因子の組のモヂュライ空間とおもえる。 $\mathcal{M}(2)_{Lef}$ の次元は 14 次元である。次の問題はミラー双対性予想の観点から興味深い。

Question 4.1 $\mathcal{M}(2)_{Lef}$ の "良いコンパクト化" を構成せよ。

$\mathcal{M}(2)_{Lef}$ は $\mathcal{M}(2) \simeq \mathcal{W}(2)$ の Zariski 開集合であるので、 $\mathcal{M}(2)$ までまず延ばす事が必要である。

5 モヂュライ空間 $\mathcal{W}(g)$

さて、種数 N の非特異超楕円曲線のモジュライ空間を $\mathcal{H}(N)$ と書く。さて、 $\mathcal{W}(g)$ の定義 (4.3) より自然な忘却関手

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \mathcal{W}(g) & \longrightarrow & \mathcal{H}(2g+1) \\ (B, L) & \mapsto & B \end{array}$$

を得る。 $(B, L) \in \mathcal{W}(g)$ の時、 Riemann-Roch より $h^1(L) = 0$ がわかり L は $Pic^{2g+2}(B)$ の一般の点に対応としている。このことから Ψ は全射で $\Psi^{-1}(B)$ は B の次数 $2g+2$ の B 上の直線束のヤコビアン $J(B)^{2g+2}$ の Zariski 開集合であることがわかる。 (さらに詳しく $J(B)^{2g+2} - \Theta$ であることがわかる。ただし Θ はあるテータ因子。) $\dim \mathcal{H}(2g+1) = 4g+1$ であるから、 $\dim \mathcal{W}(g) = 4g+1+2g+1 = 6g+2$ である。この射

$$\Psi : \mathcal{W}(g) \longrightarrow \mathcal{H}(2g+1) \tag{5.1}$$

は実は Mumford が Tata Lectures on Theta II[Mum] の Chapter IIIa でとりあげられている場合の特別な場合である。 $\mathcal{W}(g)$ 上には可換なベクトル場の系が与えられ、その系は完全積分可能系 s であり、 Ψ がその積分を与えその積分多様体は Ψ の各ファイバーに現われる $J(B)^{2g+2} - \Theta$ である。
このノートを終わるにあたり次の問題をあげておく。

[2] $\mathcal{M}(g)_{Lef}$ が空集合でない事は自明ではないが示せる。

Question 5.1 $g = 2$ の時 $\mathcal{W}(2)$ の *Zariski* 開集合 $\mathcal{M}(2)_{Lef}$ 上の 3 次元カラビ = ヤウ多様体の族の正則 3 形式に関する *Picard-Fuchs* 型微分方程式と上の完全積分可能系の関係は？

References

[C-S] J.H. Conway & N.J.A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer, Second Edition (1992).

[Kon] Konno, K., Non-hyperelliptic fibrations of small genus and certain irregular canonical surfaces Ann. Sc. Norm. Pisa Ser. IV **XX**, 4, 1993, 575-595.

[Mi], J. S. Milne, *Jacobian Varieties*, in "Arithmetic Geometry", Spriger-Verlag, 1986, 167-212.

[Mo] A. Moriwaki, *Bogomolov conjecture over function fields for stable curves with only irreducible fibers*, to appear in Comp. Math.

[Mum] D. Mumford, **Tata Lectures on Theta II**, Birkhäuser, Progress in Math., **Vol. 43**.

[N] I. Nakamura, *Relative Compactification of the Néron model and its application*, Complex Analysis and Algebraic Geometry, edited by W.L. Baily, Jr. and T.Shioda, Iwanami Shoten and Cambridge University Press, 207-225, 1977.

[N-S], K.V. Nguyen and M.-H. Saito, *On Mordell-Weil lattices of non-hyperelliptic fibrations on surfaces with* $p_g = q = 0$, preprint.

[Sh1]: T. Shioda, *On the Mordell-Weil lattices,* Comment. Math. Univ. St. Pauli **39**, 211-240, 1990.

[Sh2]: T. Shioda, *Mordell-Weil lattices for higher genus fibration,* Proc. Japan Acad. **68A** 247-250, 1992.

[Sh3]: T. Shioda, **Mordell-Weil Lattice の理論とその応用**, **東京大学数理科学セミナリーノート 1**, 1993.

[Sa-Sak]: M.-H. Saito and K.-I. Sakakibara, *On Mordell-Weil lattices of higher genus fibrations on rational surfaces*, Jour. of Math., Kyoto University, **34**, No. 4, 859-871, 1994

[Sa1]: M.-H. Saito, *On Upperbounds of Mordell-Weil ranks of higher genus fibrations*, Proceedings of workshop of Algebraic Geometry and Hodge theory in Sapporo, Juten Lecture Note No. **10** (1995)、 26-35.

[Sa2]: M.-H. Saito, *On Upperbounds of Mordell-Weil ranks of higher genus fibrations*, in Algebraic Cycles and related topics, edited by Fumio Hazama, (World Scientific), (1995), 37-42.

[Xiao] G. Xiao, *Fibered algebraic surfaces with low slope*, Math. Ann. **276**, 449-466, 1987